

2.2.1 Ratkaiseminen arvausta sovittamalla

Esimerkki: lomituserjestäminen (edellä)

Yleistys: Ratkaistava

$$\begin{aligned}T(1) &\leq c \\T(n) &\leq g(T(1), \dots, T(n-1), n)\end{aligned}$$

missä g on n ensimmäisen parametrin suhteen kasvava.
(Ratkaisu tässä tarkkuudella $T(n) = O(\dots)$.)

Menettely:

1. Arvataan ratkaisun muoto f , ts. oletetaan

$$T(n) \leq f(n, a_1, \dots, a_k)$$

missä $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k)$ myöhemmin määrättäviä parametreja (vrt. a ja b edellä)

2. Sovitetaan parametrien a_1, \dots, a_k arvot niin, että voidaan todistaa

$$\begin{aligned}c &\leq f(1, \mathbf{a}) \\g(f(1, \mathbf{a}), \dots, f(n-1, \mathbf{a}), n) &\leq f(n, \mathbf{a})\end{aligned}$$

3. Nyt $T(n) \leq f(n, \mathbf{a})$ seuraa induktiolla.

Huomattavaa:

- Hankalan yhtälön ratkaisuksi voi arvata samanmuotoisen siistimmän yhtälön ratkaisun. Esim. yhtälön

$$T(n) = 2T(n/2 + 17) + 5n$$

ratkaisu on sama $\Theta(n \log n)$ kuin yhtälöllä

$$T(n) = 2T(n/2) + n.$$

- Vaikka $T(n) \leq f(n)$ ei onnistu, voi silti olla $T(n) = O(f(n))$. Kokeile induktiohypoteesia $T(n) \leq f(n) + b$ missä b on uusi parametri.

2.2.2 Ratkaiseminen purkamalla

Esimerkki:

$$\begin{aligned}T(1) &= 1 \\T(n) &= 3T(n/4) + n \quad \text{kun } n = 4^k > 1\end{aligned}$$

Suoraan saadaan

$$\begin{aligned}T(n) &= 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \\&= 3\left(3T\left(\frac{n}{4 \cdot 4}\right) + \frac{n}{4}\right) + n \\&= 3^2T\left(\frac{n}{4^2}\right) + \frac{3}{4}n + n \\&= 3^2\left(3T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \frac{n}{4^2}\right) + \frac{3}{4}n + n \\&= 3^3T\left(\frac{n}{4^3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^2n + \frac{3}{4}n + n \\&= \dots \\&= 3^mT\left(\frac{n}{4^m}\right) + n \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i\end{aligned}$$

kun $m \leq k$ missä $n = 4^k$.

Erityisesti valisemalla $m = k$ (jolloin $4^m = n$) saadaan

$$\begin{aligned} T(n) &= 3^k T(1) + n \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^i \\ &= 3^k + n \frac{(3/4)^k - 1}{3/4 - 1} \\ &= 3^k \left(1 - n \frac{(1/4)^k}{1/4}\right) + n \frac{1}{1/4} \\ &= 3^{\log_4 n} (1 - 4) + 4n \\ &\quad \text{(koska } n = 4^k) \\ &= 4n - 3n^{\log_4 3} \\ &\quad \text{(koska } x^{\log y} = y^{\log x}) \\ &= \Theta(n) \\ &\quad \text{(koska } \log_4 3 < 1) \end{aligned}$$

□

Yleisemmin: Olkoon

$$\begin{aligned}T(1) &= c_1 \\T(n) &= aT(n/b) + d(n) \quad \text{kun } n = b^k, k \geq 1\end{aligned}$$

missä a ja b ovat positiivisia kokonaislukuja ja d jokin funktio.

Puretaan yhtälö, kun $n = b^k$:

$$\begin{aligned}T(n) &= T(b^k) \\&= aT(b^{k-1}) + d(b^k) \\&= a(aT(b^{k-2}) + d(b^{k-1})) + d(b^k) \\&= a^2T(b^{k-2}) + ad(b^{k-1}) + d(b^k) \\&= a^2(aT(b^{k-3}) + d(b^{k-2})) + ad(b^{k-1}) + d(b^k) \\&= a^3T(b^{k-3}) + a^2d(b^{k-2}) + ad(b^{k-1}) + d(b^k) \\&= \dots \\&= a^i T(b^{k-i}) + \sum_{j=0}^{i-1} a^j d(b^{k-j}) \\&= \dots \\&= \underbrace{a^k T(1)}_{\text{homogeeninen osa}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a^j d(b^{k-j})}_{\text{epähomogeeninen osa}}\end{aligned}$$

- Homogeeninen osa on siis

$$a^k c_1 = c_1 a^{\log_b n} = c_1 n^{\log_b a}$$

eli polynominen.

- Epähomogeeninen osa pitää tarkastella erikseen. Seuraavassa käsitellään tärkeä erikoistapaus $d(n) = c_2 n^\alpha$, α vakio.

Lause ("Master Theorem") Olkoot $c_1, a, \alpha > 0$, $c_2 \geq 0$ ja $b \in \{2, 3, 4, \dots\}$ sekä

$$\begin{aligned} T(1) &= c_1 \\ T(n) &= aT(n/b) + c_2 n^\alpha, \quad n = b^k > 1. \end{aligned}$$

Arvoilla $n = b^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, pätee:

1. Jos $a > b^\alpha$ tai $c_2 = 0$ niin

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}).$$

2. Jos $a < b^\alpha$ ja $c_2 \neq 0$ niin

$$T(n) = \Theta(n^\alpha).$$

3. Jos $a = b^\alpha$ ja $c_2 \neq 0$ niin

$$T(n) = \Theta(n^\alpha \log n).$$

Huom. $a \geq b^\alpha$ joss $\alpha \leq \log_b a$ joss $n^\alpha \leq n^{\log_b a}$.

Todistus Edellä nähtiin, että

$$\begin{aligned}T(n) &= a^k T(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c_2 (b^{k-j})^\alpha \\ &= c_1 n^{\log_b a} + c_2 \sum_{j=0}^{k-1} a^j (b^\alpha)^{k-j}.\end{aligned}$$

Tapaus $c_2 = 0$ on selvä. Jos $a \neq b^\alpha$, saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} a^j (b^\alpha)^{k-j} &= b^{\alpha k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b^\alpha}\right)^j \\ &= (b^\alpha)^k \frac{(a/b^\alpha)^k - 1}{a/b^\alpha - 1} \\ &= \frac{a^k - (b^\alpha)^k}{a/b^\alpha - 1} \\ &= \left(\frac{a}{b^\alpha} - 1\right)^{-1} (n^{\log_b a} - n^\alpha)\end{aligned}$$

sillä

$$a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

ja

$$(b^\alpha)^k = (b^k)^\alpha = n^\alpha.$$

1. Jos $a > b^\alpha$, niin $(a/b^\alpha - 1)^{-1} > 0$ ja $n^\alpha < n^{\log_b a}$, joten epähomogeenisesta osasta tulee

$$\sum_{j=0}^{k-1} a^j (b^\alpha)^{k-j} = \Theta(n^{\log_b a})$$

eli sama kuin homogeenisesta, joten myös koko ratkaisu on

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}).$$

2. Jos $a < b^\alpha$, niin $(a/b^\alpha - 1)^{-1} < 0$ ja $n^\alpha > n^{\log_b a}$, joten epähomogeenisesta osasta tulee

$$\sum_{j=0}^{k-1} a^j (b^\alpha)^{k-j} = \Theta(n^\alpha),$$

joten koko ratkaisu on

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(n^\alpha) = \Theta(n^\alpha).$$

3. Jos $a = b^\alpha$, epähomogeeniseksi osaksi saadaan

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k-1} a^j (b^\alpha)^{k-j} &= \sum_{j=0}^{k-1} a^k \\ &= ka^k \\ &= (\log_b n) a^{\log_b n} \\ &= (\log_b n) n^{\log_b a} \\ &= \Theta(n^{\log_b a} \log n)\end{aligned}$$

ja koko ratkaisu on siis

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \Theta(n^{\log_b a} \log n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n).$$

□

2.2.3 Muunnostekniikoita

Esimerkki arvoalueen muunnos

$$\begin{aligned}T(0) &= 1 \\T(n) &= 5T(n-1)^2, \quad n \geq 1\end{aligned}$$

Merkitään $U(n) = \log T(n)$:

$$\begin{aligned}U(0) &= 0 \\U(n) &= \log(5T(n-1)^2) \\&= 2 \log T(n-1) + \log 5 \\&= 2U(n-1) + \log 5, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Puretaan:

$$\begin{aligned}U(n) &= 2U(n-1) + \log 5 \\&= 2(2U(n-2) + \log 5) + \log 5 \\&= \dots \\&= 2^k U(n-k) + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \log 5 \\&= \dots \\&= 2^n U(0) + \log 5 \sum_{j=0}^{n-1} 2^j \\&= (2^n - 1) \log 5.\end{aligned}$$

Siis

$$T(n) = 2^{U(n)} = (2^{\log 5})^{2^n - 1} = 5^{2^n - 1}.$$

Esimerkki muuttujanvaihto

$$\begin{aligned}T(2) &= 1 \\T(n) &= 2T(\sqrt{n}) + (\log n)^2 \quad \text{"sopivilla" } n\end{aligned}$$

Merkitään $U(k) = T(2^k)$:

$$\begin{aligned}U(1) &= 1 \\U(k) &= 2T(2^{k/2}) + (\log 2^k)^2 \\&= 2U(k/2) + k^2 \quad \text{"sopivilla" } k.\end{aligned}$$

Kuten aiemmin saadaan tästä

$$\begin{aligned}U(2^i) &= 2^i + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j (2^{i-j})^2 \\&= 2^i + 2^{2i} \sum_{j=0}^{i-1} 2^{-j} \\&= 2^i + 2^{2i} \frac{(1/2)^i - 1}{1/2 - 1} \\&= 2^i + 2^{2i} \frac{2^{-i} - 1}{-1/2} \\&= 2^i + 2^{2i+1} (1 - 2^{-i}) \\&= 2^i + 2^{2i+1} - 2^{i+1}\end{aligned}$$

eli

$$U(k) = k + 2k^2 - 2k = 2k^2 - k.$$

Siis kun $n = 2^k$ saadaan

$$T(n) = U(\log n) = 2(\log n)^2 - \log n.$$

2.2.4 Generoivat funktiot

Merkitään $T(n) = t_n$. Jonon (t_0, t_1, t_2, \dots) generoiva funktio G saadaan kaavasta

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n$$

(niillä z joilla tämä suppenee).

Esimerkkejä

1. Jonon $(1, 1, 1, \dots)$ generoiva funktio G saadaan geometrisesta sarjasta:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^n = \frac{1}{1-z}.$$

2. Jonon $(1, 2, 4, 8, \dots)$ generoiva funktio on G missä

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1-2z}.$$

3. Jonon $(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$ generoiva funktio on G missä

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Generoivien funktioiden käyttäminen rekursioyhtälöiden ratkaisemisessa perustuu siihen, että jos funktiolla on potenssisarjaesitys niin se on yksikäsitteinen:

Lause Olkoon f funktio jolla on potenssisarjaesitykset

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n \quad \text{ja} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

jotka kumpikin suppenevat (ainakin) kun $-\varepsilon < z < \varepsilon$ jollain $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$t_n = s_n \quad \text{kaikilla } n.$$

Todistus Diff. int. I tms. \square

Tästä saadaan seuraava resepti jonoa (t_n) koskevan rekursioyhtälön ratkaisemiseksi:

1. muodosta rekursioyhtälöstä yhtälö generoivalle funktiolle G
2. ratkaise G
3. kehitä saatu G potenssisarjaksi
4. luvut t_n saadaan nyt suoraan potenssisarjan kertoimina

Idea on, että rekursioyhtälö muuntuu generoivaa funktiota G koskevaksi algebralliseksi (tai differentiaali-) yhtälöksi, ja tällaisten ratkaiseminen tunnetaan melko hyvin.

Esimerkki Periaatteen selventämiseksi sovelletaan generoivia funktioita muutenkin helppoon yhtälöön

$$\begin{aligned}t_0 &= 1 \\t_{n+1} &= 2t_n\end{aligned}$$

1. Sovelletaan yo. kaavaa G :n määritelmään:

$$\begin{aligned}G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n \\&= t_0 z^0 + \sum_{n=0}^{\infty} t_{n+1} z^{n+1} \\&= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2t_n z^{n+1} \\&= 1 + 2z \sum_{n=0}^{\infty} t_n z^n \\&= 1 + 2zG(z).\end{aligned}$$

2. Siis $G(z) = 1 + 2zG(z)$, mistä ratkaistaan

$$G(z) = \frac{1}{1 - 2z}.$$

3. Geometrisen sarjan summakaavasta nähdään

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n = \frac{1}{1 - 2z}.$$

4. Siis $t_n = 2^n$ kaikilla n .

Sarjakehitelmän suppenemista ei yleensä kannata ruveta tarkastelemaan. Jos asiassa on jotain epäselvää, on yleensä järkevämpää tarkistaa tuloksen oikeellisuus suoraan sijoittamalla se alkuperäiseen yhtälöön:

$$t_0 = 2^0 = 1 \quad \text{oikein!}$$

$$t_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2t_n \quad \text{oikein!}$$

Tarkistus on tietysti hyvä tehdä joka tapauksessa: lisävaiva on yleensä vähäinen ja laskuissa sattuu helposti virheitä.

Toinen esimerkki Hieman mielenkiintoisempänä esimerkkinä tarkastellaan **Fibonaccin lukuja**:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{kun } n \geq 2 \end{aligned}$$

Muodostetaan ensin yhtälö generoivalle funktiolle:

$$\begin{aligned}G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \\&= 0 + z + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{n-1} + f_{n-2}) z^n \\&= z + z \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^{n-2} \\&= z + z \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m - f_0 \right) + z^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} f_m z^m \right) \\&= z + zG(z) + z^2G(z).\end{aligned}$$

Ratkaisemalla $G(z)$ saadaan

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

Funktion G potenssisarja saadaan kätevimmin osamurtokehiteelmästä, joka on tuttu esim. rationaalifunktioiden integroinnista (Diff. int. I).

Tiedetään, että muotoa

$$R(z) = \frac{az + b}{(z - r_1) \dots (z - r_k)} \quad r_i \neq r_j \text{ kun } i \neq j$$

oleva rationaalifunktio voidaan sopivasti valituilla kertoimilla A_1, \dots, A_k esittää muodossa

$$R(z) = \frac{A_1}{z - r_1} + \dots + \frac{A_k}{z - r_k}.$$

Tunnetusti $1 - z - z^2 = -(z - r_1)(z - r_2)$ missä r_1 ja r_2 ovat yhtälön $1 - z - z^2 = 0$ juuret

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ r_2 &= -\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Voidaan siis kirjoittaa

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{-z}{(z - r_1)(z - r_2)} = \frac{A_1}{z - r_1} + \frac{A_2}{z - r_2}$$

missä r_1 ja r_2 on annettu yllä ja vakiot A_1 ja A_2 pitää vielä määrätä.

Ratkaistaan vakiot A_1 ja A_2 joilla pätee

$$\frac{-z}{(z - r_1)(z - r_2)} = \frac{A_1}{z - r_1} + \frac{A_2}{z - r_2}$$

eli kun $z \neq r_1$ ja $z \neq r_2$

$$-z = A_1(z - r_2) + A_2(z - r_1).$$

Eryityisesti tämän pitää päteä rajalla $z \rightarrow r_2$:

$$-r_2 = A_2(r_2 - r_1)$$

eli

$$A_2 = \frac{r_2}{r_1 - r_2}.$$

Vastaavasti rajalla $z \rightarrow r_1$ saadaan

$$-r_1 = A_1(r_1 - r_2)$$

eli

$$A_1 = \frac{r_1}{r_2 - r_1}.$$

Siis näillä arvoilla r_1 , r_2 , A_1 ja A_2 pätee

$$G(z) = \frac{A_1}{z - r_1} + \frac{A_2}{z - r_2}.$$

Siis kun sijoitetaan vakioiden A_1 ja A_2 arvot saadaan

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{A_1}{z - r_1} + \frac{A_2}{z - r_2} \\ &= \frac{A_1}{r_1} \cdot \frac{1}{1 - z/r_1} - \frac{A_2}{r_2} \cdot \frac{1}{1 - z/r_2} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \cdot \frac{1}{1 - z/r_1} + \frac{1}{r_2 - r_1} \cdot \frac{1}{1 - z/r_2}. \end{aligned}$$

Sovelletaan geometrisen sarjan summaa:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_1}\right)^n + \frac{1}{r_2 - r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{r_2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\left(\frac{1}{r_1}\right)^n - \left(\frac{1}{r_2}\right)^n \right) z^n. \end{aligned}$$

Tästä nähdään

$$f_n = \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\left(\frac{1}{r_1}\right)^n - \left(\frac{1}{r_2}\right)^n \right)$$

eli, kun sijoitetaan arvot r_1 ja r_2 ja sievennetään,

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

Huom. $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ ja $(1 - \sqrt{5})/2 \approx -0,618$, joten $f_n = O(1,62^n)$.