

Algoritmien DP ja MF vertaileminen tapahtuu suoraviivaisesti kirjoittamalla kummankin leskimääräinen kustannus eksplisiittisesti todennäköisyyksien p_i avulla.

Lause

$$T_{\text{ave}}^{\text{MF}} = 1 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{p_i p_j}{p_i + p_j}.$$

Todistus Olkoon $B_t(i, j) = 1$ jos ajanhetkellä t alkio i on MF-algoritmin listassa ennen alkioita j . Siis operaation $\text{access}(j)$ kustannus ajanhetkellä t (jos se tulisi suoritettavaksi) olisi

$$1 + \sum_{i=1}^n B_t(i, j).$$

Olkoon $b_t(i, j)$ todennäköisyys, että $B_t(i, j) = 1$. Siis operaation $\text{access}(j)$ odotusarvoinen kustannus ajanhetkellä t olisi

$$1 + \sum_{i=1}^n b_t(i, j).$$

Siis

$$S_{\text{ave}}^{\text{MF}}(t) = \sum_{j=1}^n p_j (1 + \sum_{i=1}^n b_t(i, j)).$$

(Huom. hetkellä t suoritettava operaatio on riippumaton satunnaismuuttujista $B_t(i, j)$.)

On kaksi tapausta joissa hetkellä t alkio i on ennen alkioita j :

1. Alkutilanteessa alkio i oli ennen alkioita j , ja kumpaakaan ei vielä ole haettu. Tämän todennäköisyys on

$$b_1(i, j)(1 - p_i - p_j)^{t-1}$$

2. Alkioita i on viimeksi haettu jollain hetkellä $1 \leq k \leq t - 1$, minkä jälkeen ei ole haettu alkioita j . Tämän todennäköisyys on

$$\sum_{k=1}^{t-1} p_i(1 - p_i - p_j)^{t-1-k} = \sum_{h=0}^{t-2} p_i(1 - p_i - p_j)^h$$

Merkitään $b(i, j) = \lim_{t \rightarrow \infty} b_t(i, j)$. Tietysti $b(i, i) = 0$; kun taas $i \neq j$, saadaan

$$\begin{aligned} b(i, j) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(b_1(i, j)(1 - p_i - p_j)^{t-1} + \sum_{h=0}^{t-2} p_i(1 - p_i - p_j)^h \right) \\ &= 0 + \frac{p_i}{1 - (1 - p_i - p_j)} \\ &= \frac{p_i}{p_i + p_j}. \end{aligned}$$

(Tässä ja jatkossa oletetaan $p_i, p_j \neq 0$).

Väite seuraa nyt suoralla laskulla:

$$\begin{aligned}
 T_{\text{ave}}^{\text{MF}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} S_{\text{ave}}^{\text{MF}}(m) \\
 &= \sum_{j=1}^n p_j \left(1 + \sum_{i=1}^n b(i, j) \right) \\
 &= 1 + \sum_{i \neq j} \frac{p_i p_j}{p_i + p_j}.
 \end{aligned}$$

□

Korollaari $T_{\text{ave}}^{\text{MF}} < 2T_{\text{ave}}^{\text{DP}}$.

Todistus Kirjoitetaan $T_{\text{ave}}^{\text{DP}}$ muodossa

$$T_{\text{ave}}^{\text{DP}} = \sum_{i=1}^n i p_i = 1 + \sum_{i=1}^n (i-1) p_i.$$

Koska $p_i / (p_i + p_j) < 1$, saadaan

$$\begin{aligned}
 T_{\text{ave}}^{\text{MF}} &= 1 + 2 \sum_{j=1}^n p_j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{p_i}{p_i + p_j} \\
 &< 1 + 2 \sum_{j=1}^n p_j (j-1) \\
 &= 2T_{\text{ave}}^{\text{DP}} - 1.
 \end{aligned}$$

Algoritmien MF ja TR vertaileminen on hankalampaa, koska ei ole mitään stabiilia lopputilannetta. Listan järjestys muuttuu (melkein) joka operaation jälkeen.

Mallinamme algoritmia tila-automaattina, jonka tiloja ovat listan mahdolliset järjestykset π (joita $n!$ kappaletta). Olkoon $P_t^A(\pi)$ todennäköisyys, että hetkellä t algoritmi A on tilassa π .

Periaatteessa voidaan tietysti laskea kullekin tilalle π

$$P_t^A(\pi) = \sum_{x \in X(\pi)} P_t(x)$$

missä $X(\pi)$ on niiden operaatiojonojen joukko, joiden jälkeen A on tilassa π . Käytännössä tämä on liian vaikeaa.

Sen sijaan tarkastelemme tilaparien välisiä [siirtymätodennäköisyyksiä](#) ja päättelemme näistä, miten eri tilojen todennäköisyydet suhtautuvat toisiinsa kun järjestelmä on asettunut (suunnilleen) [tasapainojakaumaansa](#).

Taustalla on [Markovin ketjujen](#) teoria, joka on muutenkin tärkeää tietojenkäsittelyssä: simuloitu jäähdytys, Markov Chain Monte Carlo (MCMC), Markovin piilomallit ym.

Markovin ketjut (alkeita)

Olkoon (X_0, X_1, X_2, \dots) ääretön jono satunnaismuuttujia, kunkin arvoalueena $\{1, \dots, n\}$. Siis esim. X_t on jonkin n -tilaisen prosessin tila hetkellä t . Jono on **Markovin ketju** jos jokaisella t

$$\begin{aligned} P(X_t = i_t \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}) \\ = P(X_t = i \mid X_{t-1} = i_{t-1}) \end{aligned}$$

kaikilla (i_1, \dots, i_t) ; ts. koko prosessin historian tunteminen ei auta seuraavan tilan ennustamisessa enempää kuin pelkän nykytilan tunteminen.

Kaikki prosessiin liittyvät todennäköisyydet tulevat siis määräytyiksi kun annetaan

1. kunkin ajanhetken t **siirtymämatriisi** $P^{(t)}$, missä

$$P_{ij}^{(t)} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$$

2. **alkujakauma** $a^{(0)}$ missä $a_i^{(0)} = P(X_0 = i)$.

Seuraavassa käsitellään lähinnä **homogeenista** tapausta, jossa kaikilla t matriisi $P^{(t)}$ on sama: $P^{(t)} = P$.

Vektori $q \in \mathbf{R}^n$ on **stokastinen** eli **jakaumavektori** jos $q_i \geq 0$ kaikilla i ja $\sum_{i=1}^n q_i = 1$. Erityisesti alkujakauma ja siirtymämatriisin *rivit* ovat tällaisia.

Olkoon $a^{(t)}$ tilajakauma hetkellä t . Siis

$$\begin{aligned} a_j^{(t+1)} &= P(X_{t+1} = j) \\ &= \sum_{i=1}^n P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)P(X_t = i) \\ &= \sum_{i=1}^n P_{ij}^{(t)} a_i^{(t)} \end{aligned}$$

eli $a^{(t+1)} = a^{(t)}P^{(t)}$. Erityisesti homogeenisessa tapauksessa

$$a^{(t)} = a^{(0)}P^t$$

missä P^t on tavallinen matriisin potenssi.

Jakaumavektori q on ketjun **tasapainojakauma** jos kaikilla i, j pätee

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = j \mid X_0 = i) = q_j.$$

Jos q on tasapainojakauma, niin

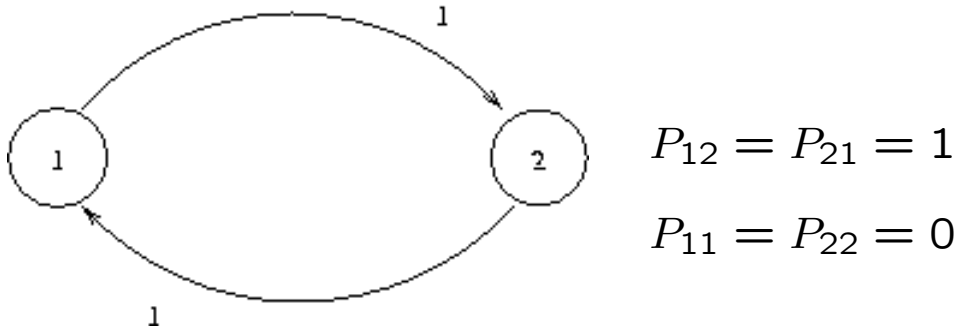
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} a_j^{(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = j) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(X_t = j \mid X_0 = i)P(X_0 = i) \\ &= q_j \sum_{i=1}^n P(X_0 = i). \end{aligned}$$

Tasapainojakaumaa ei kuitenkaan välttämättä ole olemassa.

Milloin tasapainojakaumaa ei ole?

(Tässä ja jatkossa rajoitutaan homogeeniseen tapaukseen $P^{(t)} = P$.)

Jaksot:



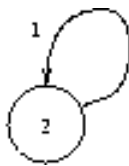
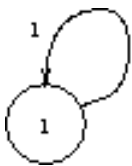
Nyt $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = 1 \mid X_0 = 1)$ ei ole määritelty, sillä

$$P(X_t = 1 \mid X_0 = 1) = \begin{cases} 1 & \text{jos } t \text{ parillinen} \\ 0 & \text{jos } t \text{ pariton} \end{cases}$$

Olkoon $D_i = \{k \mid (P^k)_{ii} > 0\}$ niiden polunpituuksien joukko, joilla tilasta i päästään itseensä positiivisella todennäköisyydellä. Ketju on **jaksoton** jos joukon D_i lukujen suurin yhteinen tekijä on 1 kaikilla i .

(Esimerkissä $D_1 = D_2 = \{0, 2, 4, \dots\}$, ja s.y.t. on 2 kummallekin tilalle. Siis ketju on jaksollinen.)

Epäyhtenäisyys:



$$P_{11} = P_{22} = 1$$

$$P_{12} = P_{21} = 0$$

Nyt rajajakauma riippuu alkutilasta:

$$P(X_t = j \mid X_0 = i) = \begin{cases} 1 & \text{jos } j = i \\ 0 & \text{jos } j \neq i \end{cases}$$

Ketju on **vahvasti yhtenäinen** jos kaikilla i, j on olemassa k jolla $(P^k)_{ij} > 0$, eli todennäköisyys siirtyä tilasta i tilaan j tasan k askelella on positiivinen.

Itse asiassa edellä esitetyt kaksi syytä ovat ainoita jotka voivat estää tasapainojakauman olemassaolon:

Lause Jos homogeeninen Markovin ketju on jaksoton ja vahvasti yhtenäinen, sillä on tasapainojakauma. \square

Lemma Jos q on tasapainojakauma niin

$$q = qP.$$

Todistus

$$q = \lim_{t \rightarrow \infty} a^{(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} a^{(t+1)} = \lim_{t \rightarrow \infty} a^{(t)}P = qP.$$

□

Lemma Jos q^* on tasapainojakauma ja q jakauma jolle

$$q_i P_{ij} = q_j P_{ji}$$

kaikilla i, j , niin $q = q^*$.

Todistus Oletuksen mukaan

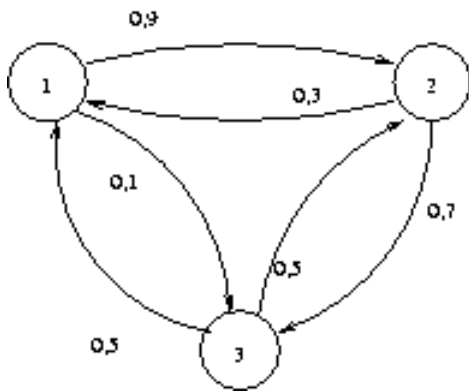
$$(qP)_j = \sum_{i=1}^n q_i P_{ij} = \sum_{i=1}^n q_j P_{ji} = q_j.$$

Siis $qP = q$, joten valitsemalla $a^{(0)} = q$ saadaan

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a^{(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} a^{(0)}P^t = \lim_{t \rightarrow \infty} qP^t = q.$$

Tasapainojakauman määritelmän nojalla $q = q^*$. □

Esimerkki



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 9/10 & 1/10 \\ 3/10 & 0 & 7/10 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ketju on jaksoton ja vahvasti yhtenäinen, joten tasapainojakauma q on olemassa. Se voidaan ratkaista yhtälöstä $q = qP$ eli

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{3}{10}q_2 + \frac{1}{2}q_3 \\ q_2 &= \frac{9}{10}q_1 + \frac{1}{2}q_3 \\ q_3 &= \frac{1}{10}q_1 + \frac{7}{10}q_2 \end{aligned}$$

mistä saadan lisäehto $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ huomioonottaen

$$q = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{65}{233}, \frac{95}{233}, \frac{73}{233} \right).$$

Huomataan että tässä esimerkissä tasapainojakauma **ei** toteuta ehtoa $q_i P_{ij} = q_j P_{ji}$.

Sovelletaan nyt Markovin ketjuja **TR-algoritmin** analysoimiseen.

Siis tiloja on $n!$ kappaletta, ja ne esittävät permutaatioita π tai vastaavasti listoja L , joiden yhteys on

$$L[\pi(i)] = i.$$

Käytetään seuraavassa listaesitystä, joka on havainnollisempi.

Tilojen välillä on seuraavanlaisia siirtymiä:

- tilasta $L = (l_1, \dots, l_n)$ on siirtymä **itseensä** todennäköisyydellä p_{l_1} (haetaan listan 1. alkio, mikään ei muutu)
- tilasta $L = (l_1, \dots, l_{k-2}, l_{k-1}, l_k, l_{k+1}, \dots, l_n)$ on siirtymä tilaan $L' = (l_1, \dots, l_{k-2}, l_k, l_{k-1}, l_{k+1}, \dots, l_n)$ todennäköisyydellä p_{l_k} (haetaan listan k . alkio joka siirtyy yhden askelen lähemmäs keulaa)
- muiden siirtymien todennäköisyys on nolla

Huomataan että jokaisesta tilasta on siirtymä itseensä positiivisella todennäköisyydellä (koska oletetaan $p_i > 0$ kaikilla i). Siis erityisesti ketju on **jaksoton**.

Ketju on selvästi myös **yhtenäinen**, joten sillä on **tasapainojakauma**.

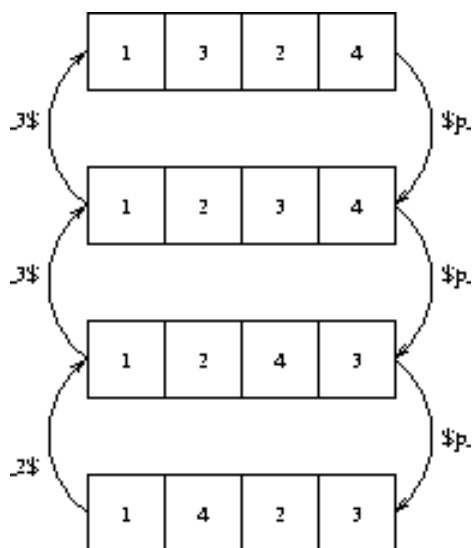
Olkoon $P_{LL'}$ edellä esitetyn mukainen todennäköisyys siirtyä tilasta L tilaan L' . Huomaa että $P_{LL'} \neq 0$ jos ja vain jos $P_{L'L} \neq 0$.

Tavoitteena on konstruoida sellainen jakauma P eri listojen yli, että

$$\frac{P(L)}{P(L')} = \frac{P_{LL'}}{P_{L'L}}$$

aina kun $P_{LL'}, P_{L'L} \neq 0$. Edellä esitettyjen tulosten mukaan tämä P on tasapainojakauma.

Alla on esimerkkinä osa tapauksen $n = 4$ ketjusta:



$$\begin{aligned} P_{1324,1234} &= p_2 \\ P_{1234,1324} &= p_2 \\ P_{1234,1243} &= p_3 \\ P_{1243,1234} &= p_3 \\ P_{1243,1423} &= p_4 \\ P_{1423,1243} &= p_4 \end{aligned}$$

Siis jos yo. ehto pätee, saadaan esim.

$$P_{1324} = \frac{p_3}{p_2} P(1234) = \frac{p_3 p_3}{p_2 p_4} P(1243) = \frac{p_3 p_3 p_2}{p_2 p_4 p_4} P(1423).$$

Yleisemmin sääntö näyttäisi olevan

$$P(L) = \prod_{(i,j) \in D} \frac{p_j}{p_i} P(L')$$

missä D on niiden parien (i, j) joukko, joilla alkio j on ennen alkioita i listassa L mutta alkion i jälkeen listassa L' . Osoitetaan nyt täsmällisesti, että

1. tämän yleisemmän säännön toteuttava P todella on olemassa ja
2. kyseinen P on tasapainojakauma.

Oletetaan ensin että P toteuttaa yo. ehdon. Olkoon $L = (l_1, \dots, l_{k-2}, l_{k-1}, l_k, l_{k+1}, \dots, l_n)$ ja $L' = (l_1, \dots, l_{k-2}, l_k, l_{k-1}, l_{k+1}, \dots, l_n)$, jolloin siis $P_{LL'} = p_{l_k}$ ja $P_{L'L} = p_{l_{k-1}}$. Koska vastaava joukko D koostuu parista (l_k, l_{k-1}) , nähdään että

$$\frac{P(L)}{P(L')} = \frac{p_{l_{k-1}}}{p_{l_k}} = \frac{P_{L'L}}{P_{LL'}}$$

eli tasapainojakauman ehto toteutuu.

Jotta jakauma P todella saadaan konstruoiduksi, muodostetaan ensin apufunktio S . Valitaan mielivaltainen lista L_0 ja asetetaan $S(L_0) = 1$.

Muille listoille L asetetaan

$$S(L) = \prod_{(i,j) \in D} \frac{p_j}{p_i}$$

missä taas D on niiden parien (i, j) joukko joilla alkio j on ennen alkioita i listassa L mutta alkion i jälkeen listassa L_0 .

Selvästi nähdään, että haluttu P saadaan asettamalla

$$P(L) = \frac{1}{Z} S(L) \quad \text{kaikilla } L,$$

missä Z on normitusvakio

$$Z = \sum_L S(L).$$

Yhteenveto tähänastisesta: tasapainojakauma P on olemassa ja toteuttaa $P(L)P_{LL'} = P(L')P_{L'L}$.

Olkoon nyt $b'(i, j)$ tasapainojakauman mukainen todennäköisyys, että alkio i on ennen alkioita j TR-algoritmin listassa. Muistetaan että MF-algoritmillemme vastaava todennäköisyys on

$$b(i, j) = \frac{p_i}{p_i + p_j}.$$

Pyritään arvioimaan todennäköisyyttä "oikeassa järjestyksessä" oleville pareille, eli suuretta $b'(i, j)$ kun $p_i \geq p_j$.

Tarkastellaan paria (L, L') joka poikkeaa toisistaan vain yhden parin osalta: joillain indekseillä $a < b$ pätee $L[a] = L'[b] = i$ ja $L[b] = L'[a] = j$, mutta indekseillä $c \in \{1, \dots, n\} - \{a, b\}$ pätee $L[c] = L'[c]$. Olkoon $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ niiden alkioden joukko, jotka jäävät alkioden i ja j väliin kummassakin listassa:

$$\begin{aligned} L &= (\dots, i, v_1, v_2, \dots, v_m, j, \dots) \\ L' &= (\dots, j, v_1, v_2, \dots, v_m, i, \dots) \end{aligned}$$

Olkoon D niiden parien (r, s) joukko, joilla alkio s on ennen alkioita r listassa L mutta alkion r jälkeen listassa L' :

$$D = \{(v, i) \mid v \in V\} \cup \{(j, v) \mid v \in V\} \cup \{(j, i)\}.$$

Olkoon nyt $i \neq j$ ja $p_i \geq p_j$. Jakauman P määritelmästä saadaan nyt

$$\begin{aligned}
 P(L) &= \prod_{(r,s) \in D} \frac{p_s}{p_r} P(L') \\
 &= \left(\prod_{v \in V} \frac{p_i}{p_v} \right) \left(\prod_{v \in V} \frac{p_v}{p_j} \right) \frac{p_i}{p_j} P(L') \\
 &= \left(\frac{p_i}{p_j} \right)^{m+1} P(L') \\
 &\geq \frac{p_i}{p_j} P(L').
 \end{aligned}$$

Nyt jokaista sellaista L jossa alkio i on ennen alkioita j vastaa sellainen yksikäsitteinen L' jossa alkio j on ennen alkioita i , ja kääntäen. Koska $b'(i, j) = \sum_L P(L)$ ja $b'(j, i) = \sum_{L'} P(L')$ ja jokaisella yksittäisellä (L, L') -parilla $P(L) \geq (p_i/p_j)P(L')$, saadaan myös

$$b'(i, j) \geq \frac{p_i}{p_j} b'(j, i).$$

Koska $b'(i, j) + b'(j, i) = 1$ (kun $i \neq j$), saadaan $b'(i, j) \geq (p_i/p_j)(1 - b'(i, j))$ eli

$$b'(i, j) \geq \frac{p_i/p_j}{1 + p_i/p_j} = \frac{p_i}{p_i + p_j} = b(i, j)$$

kun $p_i \geq p_j$, eli TR pitää listansa järjestyksessä ainakin yhtä hyvin kuin MF.