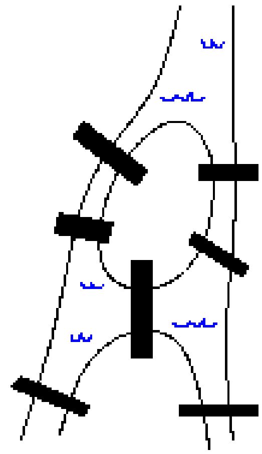
5.2 Eulerin kehät ja -polut

Königsbergin sillat: onko mahdollista tehdä (kuivin jaloin) kävelyretki siten, että jokainen silta kuljetaan tasan kerran



Eulerin polku on verkon polku, joka kulkee jokaisen kaaren kautta tasan yhden kerran.

Eulerin kehä on Eulerin polku, joka on kehä (palaa lähtösolmuunsa).

Lause (Euler 1735) Suuntaamattomassa verkossa G on Eulerin kehä jos ja vain jos

1. G on yhtenäinen ja

2. jokaisen verkon G solmun asteluku on parillinen.

Todistus Ehtojen (1) ja (2) välttämättömyys on ilmeinen.

Osoitetaan niiden riittävyys induktiolla kaarten lukumäärän $|E|$ suhteen.

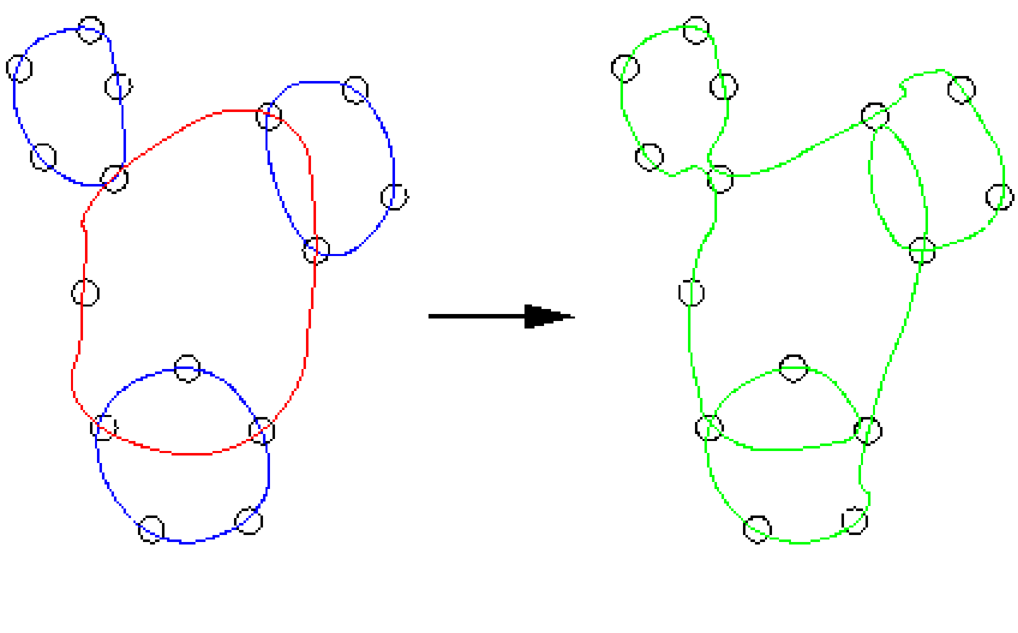
Jos $|E| \leq 3$, väite on selvä.

Oletetaan, että väite pätee kun $|E| < k$. Tarkastellaan verkkoa, joka toteuttaa ehdot (1) ja (2) ja jolle $|E| = k$.

Verkossa G on ainakin yksin kehä; olkoon sen kaarten joukko $P \subseteq E$, $|P| \geq 3$. Muodostetaan $G' = (V, E - P)$.

Verkon G' jokainen yhtenäinen komponentti toteuttaa ehdot (1) ja (2). Induktio-oletuksen nojalla jokaisessa yhtenäisessä komponentissa on Eulerin kehä.

Koska G on yhtenäinen, saadaan Eulerin kehä seuraamalla kehää P komponentista toiseen ja yhdistämällä siihen komponenttien Eulerin kehät. $\square$



Samalla idealla saadaan todistetuksi erilaisia variaatioita:

Lause Suuntaamaton yhtenäinen verkko sisältää Eulerin kehän, jos ja vain jos paritonasteisia solmuja on 0 tai 2.

Lause Suunnattu yhtenäinen verkko sisältää Eulerin kehän, jos ja vain jos jokaisen solmun tuloaste on sama kuin lähtöaste.

Lause Suunnattu yhtenäinen verkko sisältää Eulerin polun, jos ja vain jos joko jokaisen solmun tuloaste on sama kuin lähtöaste tai yhdessä solmussa $\text{tuloaste} = \text{lähtöaste} + 1$, yhdessä $\text{tuloaste} = \text{lähtöaste} - 1$ ja muissa $\text{tuloaste} = \text{lähtöaste}$.

Kaikki nämä yleistyvät ilmeisellä tapauksella moniverkkoihin, joissa kahden solmun välillä voi olla useita kaaria (kuten alkuperäisessä siltaongelmassa).

Eulerin kehä voidaan myös löytää tehokkaasti. Tämä tapahtuu etsimällä kehiä ja yhdistämällä niitä, hieman kuten lauseen todistuksessa. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi.

5.3 Verkon pariutus (matching)

Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton verkko.

Kaarijoukko $M \subseteq E$ on pariutus, jos kukin solmu $v \in V$ esiintyy korkeintaan yhdessä joukon M kaaressa.

Pariutus M on maksimipariutus, jos $|M| \geq |N|$ kaikilla pariutuksilla N. Jos lisäksi $|M| = |V|/2$, niin M on täydellinen.

Esimerkki On annettu n tehtävää $t_1, \ldots, t_n$ ja n suorittajaa $s_1, \ldots, s_n$. Asetetaan
$V = \{ t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_n \}$ ja
$E = \{ (t_i, s_j) \mid \text{suorittaja } s_j \text{ osaa tehdä tehtävän } t_i \}$.
Nyt verkon (V, E) pariutus antaa joillekin tehtäville pätevän suorittajan, ja täydellisessä pariutuksessa kaikki tehtävät tulevat suoritetuksi.

Verkko on kaksijakoinen (bipartite), jos $V = V_1 \cup V_2$, missä $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ja $E \subseteq V_1 \times V_2$.

Ylläolevassa esimerkissä verkko on kaksijakoinen, $V_1 = \{ t_1, \ldots, t_n \}$ ja $V_2 = \{ s_1, \ldots, s_n \}$. Yleisessä tapauksessa joukot V_1 ja V_2 voivat olla eri suuruisia (jolloin täydellinen pariuttaminen on tietysti mahdotonta).

Keskitymme tässä kaksijakoisiin verkkoihin. Niissäkään maksimipariutuksen löytäminen ei ole triviaalia.

Jos esim. $|V_1| = |V_2| = n/2$ ja jokaisesta puoliskon V_1 solmusta on kaari k solmuun puoliskossa V_2, raakaan voimaan perustuva ratkaisu veisi ajan $\Omega(k^{n/2})$.

Seuraavassa esitettävä menetelmä perustuu täydennyspolkuihin.

Solmu $v \in V$ on pariutettu pariutuksessa M jos $(v, w) \in M$ jollain $w \in V$, muuten vapaa.

Olkoon M kaksijakoisen verkon $G = (V_1 \cup V_2, E)$ pariutus ja $(v_1, \ldots, v_k)$ yksinkertainen polku. Kaarijoukko $P = \{ (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k) \}$ on pariutuksen M täydennyspolku jos

1. solmut v_1 ja v_k ovat vapaita ja
2. k on parillinen, kaaret (v_2, v_3), (v_4, v_5), ..., (v_{k-2}, v_{k-1}) kuuluvat pariutukseen M ja kaaret (v_1, v_2), (v_3, v_4), ..., (v_{k-1}, v_k) kuuluvat sen komplementtiin $E - M$.

Merkitään $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ (symmetrinen erotus).

Lemma Jos P on parituksen M täydennyspolku, niin $N = M \oplus P$ on pariutus ja $|N| = |M| + 1$.

Todistus Olkoon $P = P_1 \cup P_2$, missä $P_1 \subseteq E - M$ ja $P_2 \subseteq M$.

Siis $N = (M - P_2) \cup P_1$. Koska $|P_1| = |P_2| + 1$, nähdään $|N| = |M| + 1$.

Väitetään, että jokaisen solmun $v \in V$ asteluku verkossa (V, N) on korkeintaan 1.

Solmujen v_1 ja v_k asteluvuksi tulee tasan 1 täydennyspolun määritelmän mukaan.

Olkoon $v \notin \{ v_1, v_k \}$ sellainen, että $(v, w) \in P_1$ jollain w. Täydennyspolun määritelmän perusteella $(v, w') \in P_2 \subseteq M$ tasan yhdellä w', joten solmun v asteluku on sama verkoissa (V, N) ja (V, M).

Jos ei päde $(v, w) \in P_1$, niin selvästi solmun v asteluku verkossa (V, N) on korkeintaan sama kuin verkossa (V, M).

Koska M on pariutus, minkään solmun asteluvuksi ei tule yli 1. $\square$

Edellä esitetty johtaa seuraavaan algoritmihahmotelmaan kaksijakoisen verkon $G = (V_1 \cap V_2, E)$ pariuttamiseksi:

1. Aseta $M := \emptyset$.

2. Etsi pariutuksen M täydennyspolku P.

3. Jos täydennyspolkua ei löydy, tulosta M. Muuten aseta $M := M \oplus P$ ja palaa kohtaan 2.

Osoitamme pian, että tulostettava M todella on maksimipariutus. Sitä ennen täsmennetään, miten kohta 2 voidaan tehokkaasti toteuttaa.

Muodostetaan verkosta G suunnattu verkko G', jossa kaaret on suunnattu joukosta V_2 joukkoon V_1 jos ne ovat pariutuksessa M, ja joukosta V_1 joukkoon V_2 muuten.

Siis täydennyspolku muodostaa suunnatun polun vapaasta joukon V_1 solmusta vapaaseen joukon V_2 solmuun. Tällainen on helppo löytää syvyyssuuntaisella haulla, jos sellainen on olemassa.

Koska täydennyspolkuja tarvitaan enimmillään $O(|V|)$ kappaletta, aikavaativuudeksi tulee

$$O(|V|(|V| + |E|)) = O(|V||E|).$$

(Voidaan olettaa $|V| \leq 2|E|$. Muuten verkossa on eristettyjä solmuja, jotka voidaan aluksi poistaa.)

Lause Olkoon M kaksijakoisen verkon $G = (V_1 \cup V_2, E)$ pariutus. Jos M ei ole maksimipariutus, sillä on täydennyspolku.

Todistus Olkoon N pariutus ja $|N| > |M|$. Osoitetaan, että verkossa $G' = (V, M \oplus N)$ on pariutukselle M täydennyspolku.

Merkitään $S = M \cap N$. Koska $|N - S| > |M - S|$, sisältää $M \oplus N$ enemmän joukon $N - M$ kaaria kuin joukon $M - N$ kaaria.

Koska M ja N ovat pariutuksia, jokaisen solmun aste verkossa $(V, M \oplus N)$ on korkeintaan 2. Lisäksi jos solmun aste on 2, toinen siihen tuleva kaari on joukosta $M - N$ ja toinen joukosta $N - M$.

Verkon G' yhtenäiset komponentit voidaan siis jakaa seuraaviin luokkiin:

1. yksittäiset solmut,

2. kehät, joissa joka toinen kaari on joukosta $M - N$ ja joka toinen joukosta $N - M$ ja

3. yksinkertaiset polut, joissa joka toinen kaari on joukosta $M - N$ ja joka toinen joukosta $N - M$.

Luokkien 1 ja 2 komponentit sisältävät yhtä monta kaarta joukoista $M - N$ ja $N - M$, joten luokassa 3 on oltava ainakin yksi polku, jossa on enemmän joukon $N - M$ kaaria kuin joukon $M - N$. Tämä on haluttu täydennyspolku. $\square$

Edellä esitetyn perusteella täydennyspolkujen syvyyssuuntaiseen etsimiseen perustuva algoritmi tuottaa kaksijakoisen verkon maksimipariutuksen ajassa $O(|V||E|)$. Tehokkaammilla menetelmillä maksimipariutus saadaan ajassa $O(\sqrt{|V|}|E|)$ kaksijakoisessa verkossa (Hopcroft ja Karp, 1973) ja myös yleisessä verkossa (Micali ja Vazirani, 1980).

Pariutusongelma kaksijakoisessa verkossa voidaan myös palauttaa maksimivuo-ongelmaan, jota ryhdymme seuraavaksi tarkastelemaan.

Todetaan vielä klassinen kombinatorinen tulos täydellisten pariutusten olemassaolosta.

Lause (Hall 1935) Olkoon $G = (V_1 \cup V_2, E)$ kaksijakoinen verkko, jolla $|V_1| = |V_2|$. Olkoon solmujoukon $U \subseteq V_1$ naapurien joukko

$$N(U) = \{\, v \in V_2 \mid (u, v) \in E \text{ jollain } u \in U \,\}.$$

Nyt verkolla G on täydellinen pariutus, jos ja vain jos $|N(U)| \geq |U|$ kaikilla $U \subseteq V_1$.

Ehdon välttämättömyys on ilmeinen. Riittävyys seuraa helpohkolla induktiolla, joka kuitenkin sivuutetaan.

5.4 Maksimivuo-ongelma

Maksimivuo-ongelmassa on annettu

- suunnattu verkko (V, E), joka ei sisällä yhden mittaisia silmukoita ($(v, v) \notin E$ kaikilla $v \in V$),
- lähde (source) $s \in V$ ja nielu (sink) $t \in V$ ja
- kapasiteettifunktio $c\colon V^2 \to \mathbf{R}$, josta oletetaan $c(u, v) \geq 0$ aina ja $c(u, v) = 0$ jos $(u, v) \notin E$.

Intuitiivisesti tarkoituksena on saada aikaan mahdollisimman suuri virtaus lähteestä nieluun verkon (V, E) esittämässä putkistossa, kun $c(u, v)$ ilmaisee solmujen u ja v välisen putken kapasiteetin ja neste noudattaa normaaleja aineen häviämättömyyslakeja.

Muodollisemmin funktio $f\colon V^2 \to \mathbf{R}$ on vuo jos

- $f(u, v) \leq c(u, v)$ kaikilla $u, v \in V$,
- $f(u, v) = -f(v, u)$ kaikilla $u, v \in V$ ja
- $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$ kaikilla $u \in V - \{ s, t \}$.

Tavoitteena on etsiä maksimivuo eli vuo f, jolla on mahdollisimman suuri voimakkuus

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v).$$

Jos $(u,v) \notin E$ ja $(v,u) \notin E$, nähdään, että $f(u,v) = 0$.
Jos $(u,v) \in E$ mutta $(v,u) \notin E$, saadaan

$$-c(u,v) \leq f(v,u) \leq 0 \leq f(u,v) \leq c(u,v).$$

Vuon voimakkuus on siis lähteestä poistuva kokonaisvuo, tai vaihtoehtoisesti nieluun saapuva kokonaisvuo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in V} f(s,v) - \sum_{u\in V} f(u,t) \\
&\quad = \sum_{v\in V} f(s,v) + \sum_{v\in V} f(t,v) \\
&\quad = \sum_{u\in V}\sum_{v\in V} f(u,v) - \sum_{u\in V-\{s,t\}}\sum_{v\in V} f(u,v) \\
&\quad = \frac{1}{2}\sum_{u\in V}\sum_{v\in V} f(u,v) + \frac{1}{2}\sum_{u\in V}\sum_{v\in V} f(v,u) \\
&\quad\quad - (|V|-2)|V|\cdot 0 \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Jatkossa merkitsemme $f(u,X) = \sum_{v\in X} f(u,v)$ jne. Siis

$$|f| = f(s,V) = f(V,t).$$

Vaikka määritelmät sallivat vuon voimakkuuden olla negatiivinen, oletamme jatkossa aina $|f| \geq 0$.

Historia Maksimivuo-ongelma on klassinen kombinatorinen optimointiongelma, jolle on kehitetty yhä tehokkaampia ja tehokkaampia algoritmeja. Merkitään jatkossa $n = |V|$ ja $m = |E|$, huom. aina $n \leq m \leq n^2$ ja usein $m \ll n^2$. Lisäksi tässä $C = \max_{u,v} f(u,v)$.

vuosi	tekijät	aikavaativuus
1956	Ford & Fulkerson	—
1969	Edmonds & Karp	$O(nm^2)$
1970	Dinic	$O(n^2m)$
1974	Karzanov	$O(n^3)$
1977	Cherkasky	$O(n^2m^{1/2})$
1978	Galil	$O(n^{5/3}m^{2/3})$
1980	Sleator & Tarjan	$O(nm\log n)$
1986	Goldberg & Tarjan	$O(nm\log(n^2/m))$
1994	King, Rao & Tarjan	$O(nm\frac{\log n}{\log m - n\log n})$
1998	Goldberg & Rao	$O(\min\left\{n^{2/3}, m^{1/2}\right\} \cdot m\log(n^2/m)\log C)$

Sivutuotteena on saatu mm. itsesäätyvät binäärihakupuut (splay trees; Sleator & Tarjan).

Avoin kysymys: onko $O(nm)$ mahdollista?

Tällä kurssilla käymme ensin läpi klassiset Ford-Fulkerson- ja Edmonds-Karp-algoritmit ja sitten erään Karzanovin ideaan perustuvan $O(n^3)$ algoritmin.

Vuon f jäännöskapasiteetti $r\colon V^2 \to \mathbf{R}$ määritellään

$$r(u, v) = c(u, v) - f(v, w).$$

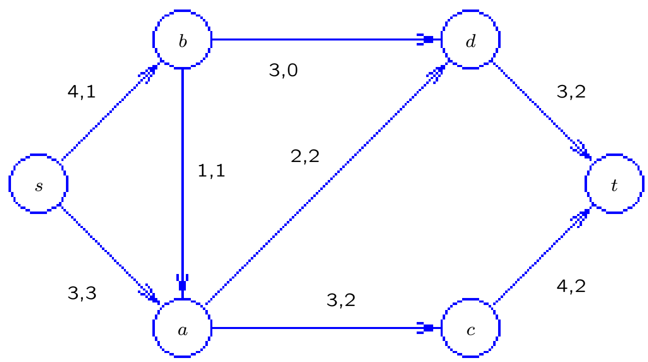
Siis aina $r(u, v) \geq 0$. Vuon f jäännösverkko on $R = (V, E')$ missä $E' = \{ (u, v) \in E \mid r(u, v) > 0 \}$. Kun puhumme vuosta jäännösverkosta, lähde ja nielu ovat entiset mutta kapasiteettifunktiona on jäännöskapasiteetti.

Täydennyspolku on jäännösverkon suunnattu polku lähteestä nieluun.

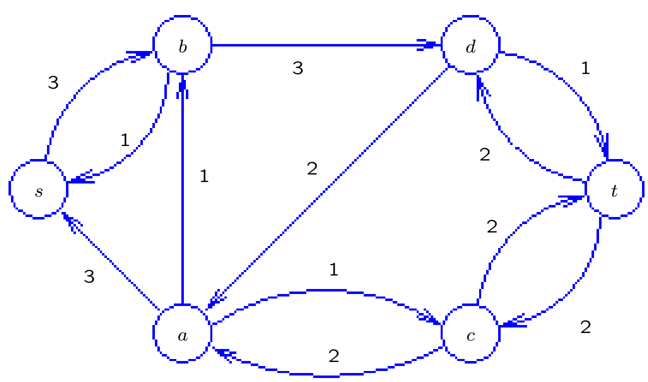
Täydennyspolun $p = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$, $v_0 = s$, $v_k = t$, jäännöskapasiteetti on

$$\mathrm{res}(p) = \min \{ r(v_{i-1,i}) \mid 1 \leq i \leq k \}.$$

Siis $\mathrm{res}(p) > 0$, ja jäännösverkon maksimivuon voimakkuus on *ainakin* $\mathrm{res}(p)$.



Verkko ja vuo. Merkintä $a \xrightarrow{3,2} c$ tarkoittaa $c(a,c) = 3$ ja $f(a,c) = 2$ jne.



Edellisen vuon jäännösverkko. Vuolla on esim. jäännöspolku $p = (s, b, d, a, c, t)$ jonka jäännöskapasiteetti on res$(p) = r(a,c) = 1$.

Verkon G leikkaus on ositus $(X, \overline{X})$ missä $X \subseteq V$, $\overline{X} = V - X$ ja lisäksi $s \in X$ ja $t \in \overline{X}$. Leikkauksen kapasiteetti on

$$\text{cap}(X, \overline{X}) = \sum_{u \in X} \sum_{v \in \overline{X}} c(u, v)$$

Leikkauksen ylittävä vuo millä tahansa leikkauksella on sama kuin vuon voimakkuus:

$$\begin{aligned}
f(X, \overline{X}) &= f(X, V) - f(X, X) \\
&= f(s, V) + \sum_{u \in X, u \neq s} f(u, V) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_{u \in X} \sum_{v \in X} f(u, v) + \sum_{u \in X} \sum_{v \in X} f(v, u) \right) \\
&= f(s, V) + (|X| - 1) \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \\
&= |f|.
\end{aligned}$$

Maksimivuot voidaan karakterisoida leikkausten kapasiteettien avulla:

Maksimivuo-minimileikkauslause Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1. vuo f on maksimivuo
2. vuolla f ei ole täydennyspolkuja
3. $|f| = \text{cap}(X, \overline{X})$ jollekin leikkaukselle $(X, \overline{X})$

Todistus (1) $\Rightarrow$ (2): Jos täydennyspolku on, sitä pitkin vuota voidaan kasvattaa.

(2) $\Rightarrow$ (3): Oletetaan, että täydennyspolkua ei ole. Olkoon X niiden solmujen joukko, joihin on polku jäännösverkossa R. Siis $t \in \overline{X}$, ja $(X, \overline{X})$ on leikkaus. Joukon X määritelmän nojalla $f(u, v) = c(u, v)$ kaikilla $u \in X$, $v \in \overline{X}$. Siis

$$|f| = f(X, \overline{X}) = \text{cap}(X, \overline{X}).$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Koska $|f| \leq \text{cap}(X, \overline{X})$ mille tahansa vuolle ja leikkaukselle, ehdosta (3) seuraa, että f on maksimivuo (ja $(X, \overline{X})$ on minimileikkaus eli kapasiteetiltaan minimaalinen leikkaus).

$\square$