

## Yhteydettömien kielioppien ja pinoautomaattien yhteys

[Sipser s. 117–124]

Todistamme, että yhteydettömien kielioppien tuottamat kielet ovat tasan samat kuin ne, jotka voidaan tunnistaa pinoautomaatilla. Aloitetaan helpommasta suunnasta.

**Lemma 2.20:** [Sipser Lemma 2.21] Jos kieli on yhteydetön, se voidaan tunnistaa pinoautomaatilla.

**Todistus:** Perusidea on laatia annetun kieliopin pohjalta pinoautomaatti, joka toteuttaa seuraavan algoritmin:

**Generoi:** Tuota epädeterministisesti pinoon merkkijono  $w \in \Sigma^*$ , jolla  $S \xRightarrow{*} w$ .

**Testaa:** Vertaa pinon merkkijono syötteeseen merkki kerrallaan. Jos löytyy ero, hylkää. Jos pino tyhjenee samaan aikaan, kun syöte loppuu, niin hyväksy.

Epädeterminismi on oleellista: valitsemalla generoimisvaiheessa sovellettavat säännöt epädeterministisesti varmistetaan, että jokaisella kieleen kuuluvalla merkkijonolla  $w$  on mahdollisuus tulla tuotetuksi.

Toteutusta rajoittaa, että automaatin tietorakenne on pino, josta vain huippu on kulloinkin näkyvässä. Siksi generointi- ja testausvaihe pitää lomittaa: aina kun pinon huipulle saadaan päätesymboleita, käydään vertaamassa niitä syötteeseen ennen generoinnin jatkamista.

Saadaan tarkennettu algoritmi:

1. Alusta pinon sisällöksi  $S\$$ , missä  $S$  on lähtösymboli ja  $\$$  merkitsee pinon pohjaa.
2. Toista seuraavaa:
  - (a) Jos pinon huipulla on muuttujasymboli  $A$ , valitse epädeterministisesti sääntö  $A \rightarrow w$ . Korvaa  $A$  merkkijonolla  $w$ .
  - (b) Jos pinon huipulla on päätesymboli, poista se pinosta ja vertaa seuraavaan syötemerkkiin. Jos ne eroavat, hylkää.
  - (c) Jos pinon huipulla on  $\$$ , hyväksy jos syöte on loppu; muuten hylkää.

Jäljellä on enää em. algoritmin koodaaminen pinoautomaatiksi.

Jatkossa sallimme merkinnän

$$(r, u) \in \delta(q, a, s)$$

myös, kun  $u = u_1 \dots u_l \in \Gamma^*$  (siis myös kun  $l > 1$ ). Merkintä tarkoittaa

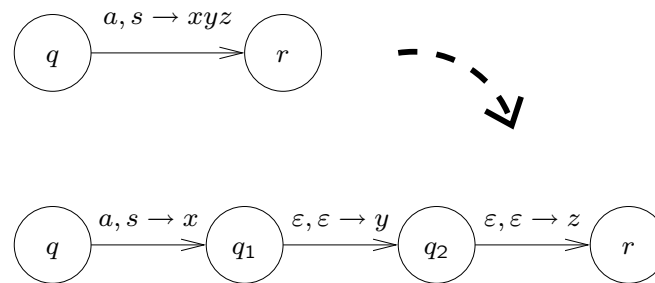
tilassa  $q \in Q$  automaatti saa siirtyä tilaan  $r \in Q$  lukemalla syötemerkin  $a \in \Sigma$  ja poimimalla pinosta merkin  $s \in \Gamma$  ja painamalla pinoon merkit  $u_l, \dots, u_1$ .

Tapaukset  $a = \varepsilon$  ja  $s = \varepsilon$  sallitaan kuten ennenkin. Muodollisesti merkintä tarkoittaa, että automaatissa on tilat  $q_1, \dots, q_{l-1}$ , joilla

$$\begin{aligned} (q_1, u_l) &\in \delta(q, a, s) \\ \delta(q_1, \varepsilon, \varepsilon) &= \{ (q_2, u_{l-1}) \} \\ \delta(q_2, \varepsilon, \varepsilon) &= \{ (q_3, u_{l-2}) \} \\ &\dots \\ \delta(q_{l-1}, \varepsilon, \varepsilon) &= \{ (r, u_1) \} \end{aligned}$$

ja joihin ei liity muita siirtymiä.

Merkinnän  $(r, xyz) \in \delta(q, a, s)$  kaavioesitys:



Olkoon nyt  $G = (V, \Sigma, R, S)$  yhteydetön kielioppi. Konstruoimme pinoautomaatin, joka tunnistaa kielen  $L(G)$ .

Automaatin runkona on kolme tilaa  $q_{\text{start}}$ ,  $q_{\text{loop}}$  ja  $q_{\text{accept}}$ . Alkutilana on  $q_{\text{start}}$  ja ainoa hyväksyvä tila  $q_{\text{accept}}$ .

Alustus hoidetaan siirtymällä

$$\delta(q_{\text{start}}, \varepsilon, \varepsilon) = (q_{\text{loop}}, S\$).$$

Tilasta  $q_{\text{loop}}$  lähtee kolmenlaisia siirtymiä:

- Kaikilla joukon  $R$  säännöillä  $A \rightarrow w$  tulee  $(q_{\text{loop}}, w) \in \delta(q_{\text{loop}}, \varepsilon, A)$ .
- Kaikilla  $a \in \Sigma$  tulee  $(q_{\text{loop}}, \varepsilon) \in \delta(q_{\text{loop}}, a, a)$ .
- Lopetusta varten  $\delta(q_{\text{loop}}, \varepsilon, \$) = (q_{\text{accept}}, \varepsilon)$ .

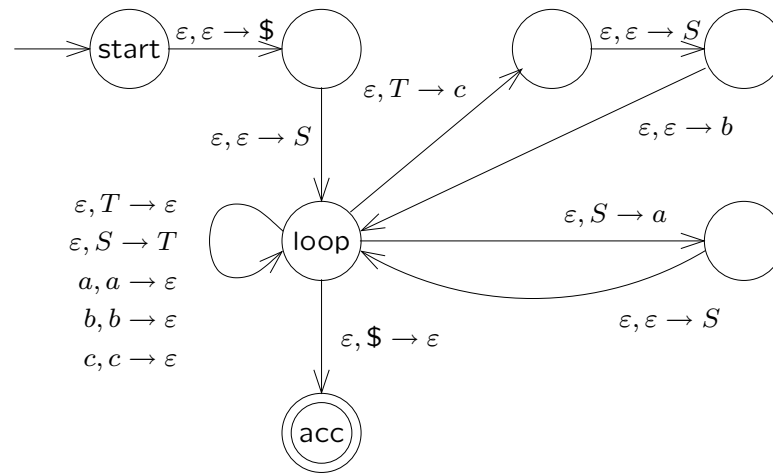
Muita siirtymiä ei ole. Selvästi automaatti toteuttaa esitetyn epädeterministisen algoritmin kielen  $L(G)$  tunnistamiseksi.  $\square$

**Esimerkki 2.21:** Soveltamalla konstruktiota kielioppiin

$$S \rightarrow Sa \mid T$$

$$T \rightarrow bSc \mid \varepsilon$$

saadaan seuraava pinoautomaatti:



Käänteinen suunta on hankalampi: meidän pitää osata "purkaa" mikä tahansa pinoautomaatti ja kuvata sen tunnistama kieli yhteydettömänä kielioppina.

**Lemma 2.22:** [Sipser Lemma 2.27] Pinoautomaatin tunnistama kieli on yhteydetön.

**Todistus:** Olkoon  $M = (V, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$  pinoautomaatti. Tehdään tekninen lisäoletus, että

1. automaatissa on tasan yksi hyväksyvä tila (merkitään sitä  $q_{\text{accept}}$ ),
2. ennen hyväksymistä  $M$  aina tyhjentää pinonsa ja
3. siirtymiä on vain seuraavia lajeja:

**pop-siirtymä:** poimii pinosta yhden merkin, ei paina mitään  
( $a, s \rightarrow \varepsilon$  missä  $a \in \Sigma_\varepsilon$  ja  $s \in \Gamma$ ) ja

**push-siirtymä:** painaa pinoon yhden merkin, ei poimi mitään  
( $a, \varepsilon \rightarrow s$  missä  $a \in \Sigma_\varepsilon$  ja  $s \in \Gamma$ ).

Ehdot 1 ja 2 saadaan helposti voimaan lisäämällä pinon loppumerkki ja ylimääräiset pinontyhjennystila ja hyväksyvä tila.

Ehto 3 saadaan voimaan korvaamalla kukin siirtymä

$a, s \rightarrow s'$  pop-push-yhdistelmällä ja kukin siirtymä

$a, \varepsilon \rightarrow \varepsilon$  push-pop-yhdistelmällä (yksi uusi tila per korjattava siirtymä).

Olkoot  $p, q \in Q$  tiloja ja  $w \in \Sigma^*$  syötemerkkijono. Merkitään  $p \xrightarrow{w} q$ , jos seuraavanlainen tapahtumaketju on mahdollinen:

- aluksi automaatti on tilassa  $p$  ja pino on tyhjä,
- siirtymät kuluttavat syötettä merkkijonon  $w$  verran ja
- lopuksi automaatti on tilassa  $q$  ja pino on taas tyhjä.

Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että seuraava on mahdollista millä tahansa  $n \in \mathbf{N}$ :

- aluksi automaatti on tilassa  $p$  ja pinossa on **tasan**  $n$  merkkiä,
- siirtymät kuluttavat syötettä merkkijonon  $w$  verran ja pinossa on koko ajan **ainakin**  $n$  merkkiä ja
- lopuksi automaatti on tilassa  $q$  ja pinossa on taas **tasan**  $n$  merkkiä.

Ehto nimittäin sanoo, että siirtyessään tilasta  $p$  syötteellä  $w$  tilaan  $q$  automaatti ei "kurki" pinon vanhoja sisältöjä, joten pinon alkutilanteella ei ole merkitystä.

Tavoitteena on määritellä kielioppi, jossa on muuttuja  $A_{pq}$  kaikilla  $p, q \in Q$  ja

$$A_{pq} \xRightarrow{*} w \iff p \xrightarrow{w} q.$$

Tarkastellaan tapahtumaketjua, kun automaatti siirtyy tilasta  $p$  syötteellä  $w$  tilaan  $q$  siten, että pino on aluksi ja lopuksi tyhjä. Toinen seuraavista pätee:

**Pino on ainakin kerran tyhjä** myös alku- ja lopputilanteen välillä. Jos  $r$  on välitila, jossa pino on tyhjä, voidaan kirjoittaa  $w = uv$ , missä

$$p \xrightarrow{u} r \xrightarrow{v} q.$$

**Pino ei välillä tyhjene.** Tällöin tapahtumaketju alkaa jonkin merkin  $t \in \Gamma$  painamisella pinoon (push-siirtymä), ja loppuu **saman merkin** poimimiseen pinosta (pop-siirtymä). Jos  $r$  ja  $s$  ovat ketjun toinen ja toiseksi viimeinen tila, niin jollain  $a, b \in \Sigma_\varepsilon$  voidaan kirjoittaa  $w = avb$ , missä

$$p \xrightarrow{a, \varepsilon \rightarrow t} r \xrightarrow{v} s \xrightarrow{b, t \rightarrow \varepsilon} q.$$

Edellisen motivoimana määrittelemme kieliopin  $G = (V, \Sigma, R, S)$  seuraavasti:

- $V = \{ A_{pq} \mid p, q \in Q \}$ ,
- $\Sigma$  on sama kuin automaatin syöteaakkosto,
- $S = A_{q_0, q_{\text{accept}}}$  ja
- joukossa  $R$  on seuraavat säännöt:
  - $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$  kaikilla  $p, q, r \in Q$ ,
  - $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$  aina kun  $(r, t) \in \delta(p, a, \varepsilon)$  ja  $(q, \varepsilon) \in \delta(s, b, t)$ , ja
  - $A_{pp} \rightarrow \varepsilon$  kaikilla  $p \in Q$ .

Osoitamme konstruktion oikeellisuuden kahdessa osassa:

**Väite A:** Jos  $A_{pq} \xRightarrow{*} w$ , missä  $w \in \Sigma^*$ , niin  $p \xrightarrow{w} q$ .

**Väite B:** Jos  $p \xrightarrow{w} q$ , missä  $w \in \Sigma^*$ , niin  $A_{pq} \xRightarrow{*} w$ .

Automaattia  $M$  koskevien oletusten nojalla  $w \in L(M)$ , jos ja vain jos  $q_0 \xrightarrow{w} q_{\text{accept}}$ . Siis väitteistä A ja B seuraa  $S \xRightarrow{*} w$ , jos ja vain jos  $w \in L(M)$ , eli haluttu tulos.

**Väitteen A todistus:** Oletetaan  $A_{pq} \xRightarrow{*} w$ , missä  $w \in \Sigma^*$ . Osoitetaan induktiolla johdon pituuden suhteen, että  $p \xrightarrow{w} q$ .

Johdon pituus 0 ei ole mahdollinen.

Jos johdon pituus on 1, niin ehdon  $w \in \Sigma^*$  takia ainoa mahdollinen johto on  $A_{pp} \Rightarrow \varepsilon$  jollain  $p$ . Selvästi  $p \xrightarrow{\varepsilon} p$  kaikilla  $p$ .

Tehdään induktio-oletus, että jollain  $k \geq 1$  väite pätee, kun johdon pituus on korkeintaan  $k$ . Tarkastellaan johtoa  $A_{pq} \xRightarrow{*} w$ , jonka pituus on  $k + 1$ . Jakaudutaan kahteen tapaukseen sen mukaan, onko johdon ensimmäinen sääntö muotoa  $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq}$  vai  $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b$ .

Tapaus I:  $A_{pq} \Rightarrow A_{pr}A_{rq} \xRightarrow{*} w$ . Siis  $A_{pr} \xRightarrow{*} u$  ja  $A_{rq} \xRightarrow{*} v$ , missä  $w = uv$ . Koska kummankin johdon pituus on korkeintaan  $k$ , induktio-oletuksen nojalla  $p \xrightarrow{u} r$  ja  $r \xrightarrow{v} q$ . Siis  $p \xrightarrow{w} q$ .

Tapaus II:  $A_{pq} \Rightarrow aA_{rs}b \xRightarrow{*} w$ . Nyt  $w = avb$ , missä  $A_{rs} \xRightarrow{*} v$ . Induktio-oletuksen nojalla  $r \overset{v}{\rightsquigarrow} s$ . Toisaalta  $(A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b) \in R$ , joten  $(r, t) \in \delta(p, a, \varepsilon)$  ja  $(q, \varepsilon) \in \delta(s, b, t)$  jollain  $t \in \Gamma$ . Seuraava tapahtumaketju on siis mahdollinen:

- Aluksi automaatti on tilassa  $p$  ja pino on tyhjä.
- Automaatti tekee yhden siirtymän  $p \xrightarrow{a, \varepsilon \rightarrow t} r$ . Nyt automaatti on tilassa  $r$  ja pinon syvyys on 1.
- Automaatti siirtyy tilasta  $r$  syötteellä  $v$  tilaan  $s$  niin, että pinossa on koko ajan ainakin yksi merkki ja lopuksi tasan yksi merkki (nimittäin  $t$ ).
- Nyt automaatti on tilassa  $s$ , ja pinon sisältö on  $t$ . Automaatti tekee siirtymän  $s \xrightarrow{b, t \rightarrow \varepsilon} q$ .
- Lopuksi automaatti on tilassa  $q$  ja pino tyhjä.

Siis  $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$ .  $\square$ (Väite A)

**Väitteen B todistus:** Oletetaan  $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$ . Osoitetaan  $A_{pq} \overset{*}{\Rightarrow} w$  induktiolla tapahtumaketjun  $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$  tilasiirtymien lukumäärän suhteen.

Jos ketjussa on 0 tilasiirtymää, niin  $p = q$  ja  $w = \varepsilon$ . Määritelmän mukaan  $A_{pp} \Rightarrow \varepsilon$ .

Oletetaan, että väite pätee  $k$  tai vähemmän siirtymiä sisältävillä ketjuilla. Olkoon  $p \overset{w}{\rightsquigarrow} q$ , missä ketjussa on  $k + 1$  siirtymää.

**Tapaus I:** Tapahtumaketjun aikana pino tyhjenee ainakin kerran ennen loppua. Olkoon  $r$  tila ja  $u$  merkkijonon  $w$  alkuosa, jolla laskenta tilasta  $p$  tyhjällä pinolla ja syötteellä  $u$  johtaa tilaan  $r$  ja tyhjään pinoon. Siis  $p \overset{u}{\rightsquigarrow} r$ , ja lisäksi pätee  $r \overset{v}{\rightsquigarrow} q$ , missä  $w = uv$ . Induktio-oletuksen mukaan  $A_{pr} \overset{*}{\Rightarrow} u$  ja  $A_{rq} \overset{*}{\Rightarrow} v$ . Koska  $A_{pq} \rightarrow A_{pr}A_{rq} \in R$ , niin  $A_{pq} \Rightarrow A_{pr}A_{rq} \overset{*}{\Rightarrow} uv = w$ .

**Tapaus II:** Tapahtumaketjussa pino ei tyhjene ennen loppua.

Siis viimeisessä siirtymässä pinosta poimitaan sama merkki  $t \in \Gamma$ , joka sinne ensimmäisessä siirtymässä työnnettiin.

Olkoot siirtymäketjun toinen tila  $r$  ja toiseksi viimeinen tila  $s$ . Siis joillain  $a, b \in \Sigma_\varepsilon$  pätee  $(r, t) \in \delta(p, a, \varepsilon)$  ja  $(q, \varepsilon) \in \delta(s, b, t)$  ja siis  $A_{pq} \rightarrow aA_{rs}b \in R$ .

Lisäksi tilasta  $r$  päästään tilaan  $s$  siten, että pinossa oleva yksi merkki säilyy ennallaan, eli  $r \overset{v}{\rightsquigarrow} s$  missä  $w = avb$ . Induktio-oletuksen nojalla  $A_{rs} \overset{*}{\Rightarrow} v$ . Siis  $A_{pq} \Rightarrow aA_{rs}b \overset{*}{\Rightarrow} avb = w$ .  $\square$ (Väite B ja Lemma 2.22)

Yhdistämällä Lemmat 2.20 ja 2.22 saadaan

**Lause 2.23:** [Sipser Thm. 2.20] Kieli on yhteydetön, jos ja vain jos se voidaan tunnistaa pinoautomaatilla.  $\square$

Huomaa, että tästä **ei** seuraa, että osaisimme millä tahansa yhteydettömällä kielellä  $A$  ja merkkijonolla  $w$  ratkaista tehokkaasti, päteekö  $w \in A$ . Pinoautomaatin toiminnassa epädeterminismi on oleellista, ja vastauksen saamiseksi voidaan joutua kokeilemaan hyvin suurta määrää erilaisia laskentoja. Kuten sivulla 112 mainittiin, tehokkaat jäsennysalgoritmit tekevät lisäoletuksia kieliopista.

Tilanne on siis tässä suhteessa erilainen kuin säännöllisten kielten ja äärellisten automaattien tapauksessa.

Voimme kuitenkin todeta seuraavan tuloksen (jonka voi todistaa helpomminkin):

**Korollari 2.24:** Säännölliset kielet ovat yhteydettömiä.

**Todistus:** Jos kieli voidaan tunnistaa äärellisellä automaatilla, se voidaan tietysti tunnistaa pinoautomaatilla.  $\square$