582206 Laskennan mallit (syksy 2006)

1. kurssikoe, ratkaisuja

1. (a) **Väite:** Kieli A_1 ei ole säännöllinen.

   Todistus: Tehdään vastaoletus, että kieli A_1 on säännöllinen. Pumppauslemman nojalla sillä on pumppauspituus p. Olkoon $s = b^{p+1}c^{p+1}$. Siis $s \in A_1$ ja $|\, s \,| \geq p$, joten on olemassa $x, y, z \in \Sigma^*$, joilla $s = xyz$ ja

   i. $xy^iz \in A_1$ kaikilla i,
   ii. $|\, y \,| > 0$ ja
   iii. $|\, xy \,| \leq p$.

   Siis $xy = b^k$ jollain k, ja $y = b^l$ jollain $l > 0$. Nyt $xyyz = b^{p+l+1}c^{p+1} \notin A_1$; ristiriita. □

   Väite: Kieli A_2 ei ole säännöllinen.

   Todistus: Tehdään vastaoletus, että A_2 on säännöllinen. Siis myös kieli $\overline{A_2}$ on säännöllinen. Todetaan, että

$$\overline{A_2} = \left\{ a^i b^j c^k \mid i = k \right\} \cup (\Sigma^* - a^* b^* c^*).$$

   Koska kieli a^*c^* on säännöllinen, edelleen kieli $\overline{A_2} \cap a^*c^*$ on säännöllinen. Merkitään $B = \overline{A_2} \cap a^*c^*$ ja todetaan, että

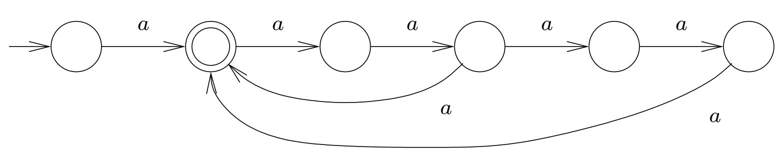
$$B = \{\, a^n c^n \mid n \in \mathbf{N} \,\}.$$

   Koska kieli B on säännöllinen, sillä on pumppauspituus p. Olkoon $s = a^{p+1}c^{p+1}$. Siis $s \in B$ ja $|\, s \,| \geq p$, joten on olemassa $x, y, z \in \Sigma^*$, joilla $s = xyz$ ja

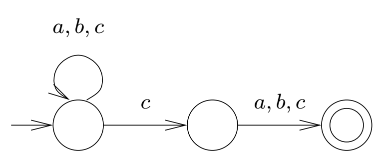
   i. $xy^iz \in B$ kaikilla i,
   ii. $|\, y \,| > 0$ ja
   iii. $|\, xy \,| \leq p$.

   Siis $xy = a^k$ jollain k, ja $y = a^l$ jollain $l > 0$. Nyt $xyyz = a^{p+l+1}c^{p+1} \notin B$; ristiriita. □

   Kieli A_3 on säännöllinen. Se voidaan esittää säännöllisellä lausekkeella $a(aaaaa)^*(aaa)^*$. Epädeterministinen automaatti:



   Kieli A_3 on säännöllinen. Se voidaan esittää säännöllisellä lausekkeella $\Sigma^* c \Sigma$. Epädeterministinen automaatti:



   (b) Kieli A_1 voidaan tuottaa yhteydettömällä kieliopilla

$$\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & XC \mid Y \mid AZ \\
X & \rightarrow & aXb \mid \varepsilon \\
Y & \rightarrow & aYc \mid B \\
Z & \rightarrow & bZc \mid \varepsilon \\
A & \rightarrow & aA \mid \varepsilon \\
B & \rightarrow & bB \mid \varepsilon \\
C & \rightarrow & cC \mid \varepsilon
\end{array}$$

ja kieli A_4 yhteydettömällä kieliopilla

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XcA \\ X &\rightarrow XA \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow a \mid b \mid c. \end{aligned}$$

2. Seuraava todistus mukailee luentojen lauseen 1.1 (Sipser Thm. 1.25) ajatusta.

   Lause: Jos A ja B ovat säännöllisiä, niin myös $A \cap B$ on.

   Todistus: Oletetaan $A = L(M_1)$ ja $B = L(M_2)$, missä $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ ja $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ ovat deterministisiä äärellisiä automaatteja. Muodostetaan $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, jolla $L(M) = A \cap B$.

   Valitaan

   - $Q = Q_1 \times Q_2$,
   - $q_0 = (q_1, q_2)$ ja
   - $F = F_1 \times F_2$.

   Siirtymäfunktio δ määritellään siten, että $\delta((q, q'), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(q', a))$ kaikilla $q \in Q_1$, $q' \in Q_2$.

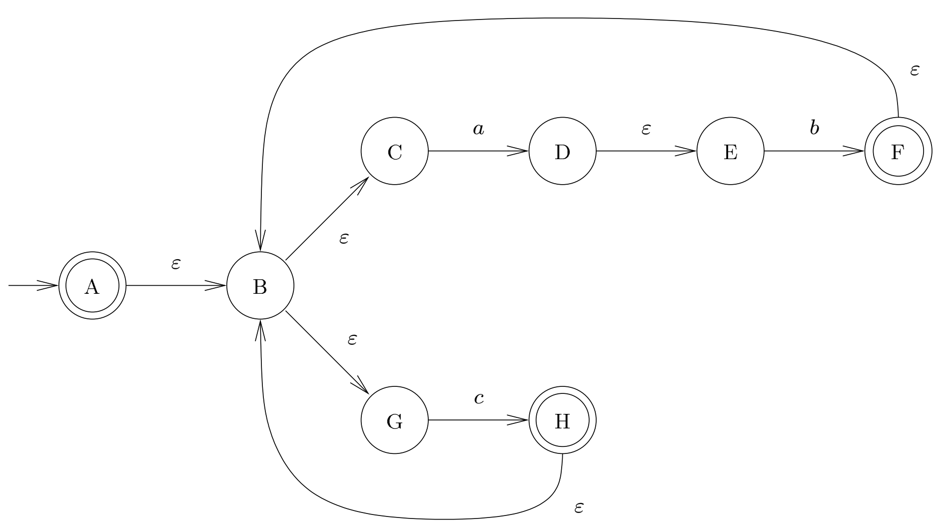
   Kun $q \in Q$ ja $w \in \Sigma^*$, niin olkoon $\tilde{\delta}(q, w) \in Q$ se tila, johon tilasta q päädytään syötteellä w. Määritellään vastaavasti $\tilde{\delta}_1$ ja $\tilde{\delta}_2$. Suoraviivainen induktio osoittaa, että $\tilde{\delta}((q, q'), w) = (\tilde{\delta}_1(q, w), \tilde{\delta}_2(q', w))$. Nyt

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\Leftrightarrow \tilde{\delta}((q_1, q_2), w) \in F \\ &\Leftrightarrow \tilde{\delta}((q_1, q_2), w) \in F_1 \times F_2 \\ &\Leftrightarrow \tilde{\delta}_1(q_1, w) \in F_1 \quad \text{ja} \quad \tilde{\delta}_2(q_2, w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow w \in L(M_1) \quad \text{ja} \quad w \in L(M_2) \\ &\Leftrightarrow w \in A \cap B. \end{aligned}$$

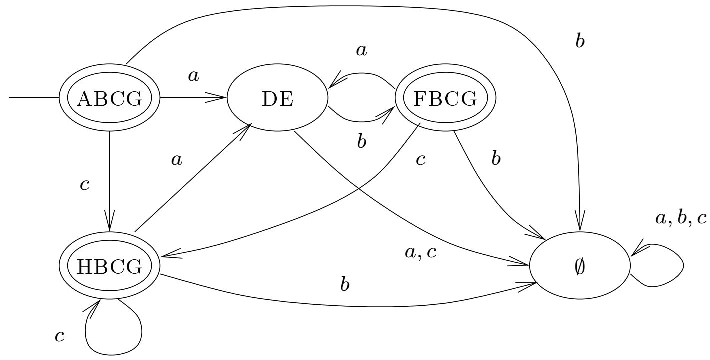
   $\square$.

   Vaihtoehtoinen todistus (hahmotelma): Todistetaan, että säännöllisen kielen komplementti on säännöllinen. Todetaan, että $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Todistetaan säännöllisten kielten yhdiste säännölliseksi käyttämällä epädeterminististä automaattia (luennot lause 1.5; Sipser Thm. 1.45).

3. Ensimmäisen vaiheen tuloksena saadaan epädeterministinen automaatti

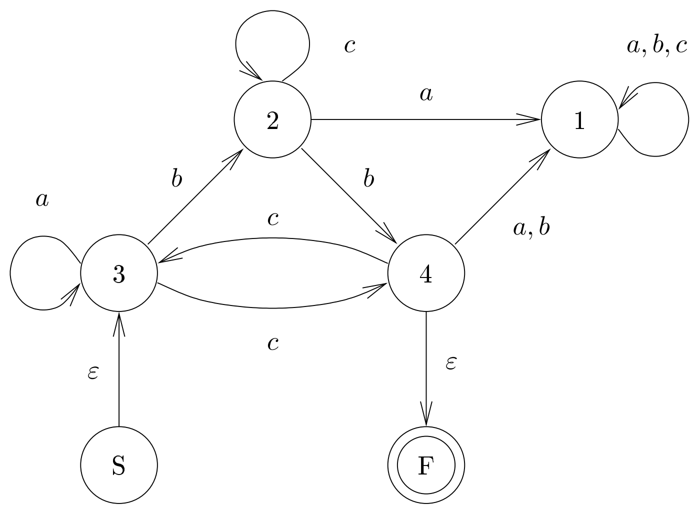


missä jatkoa ajatellen tilat on nimetty A,..., H. Determinisointi antaa tulokseksi

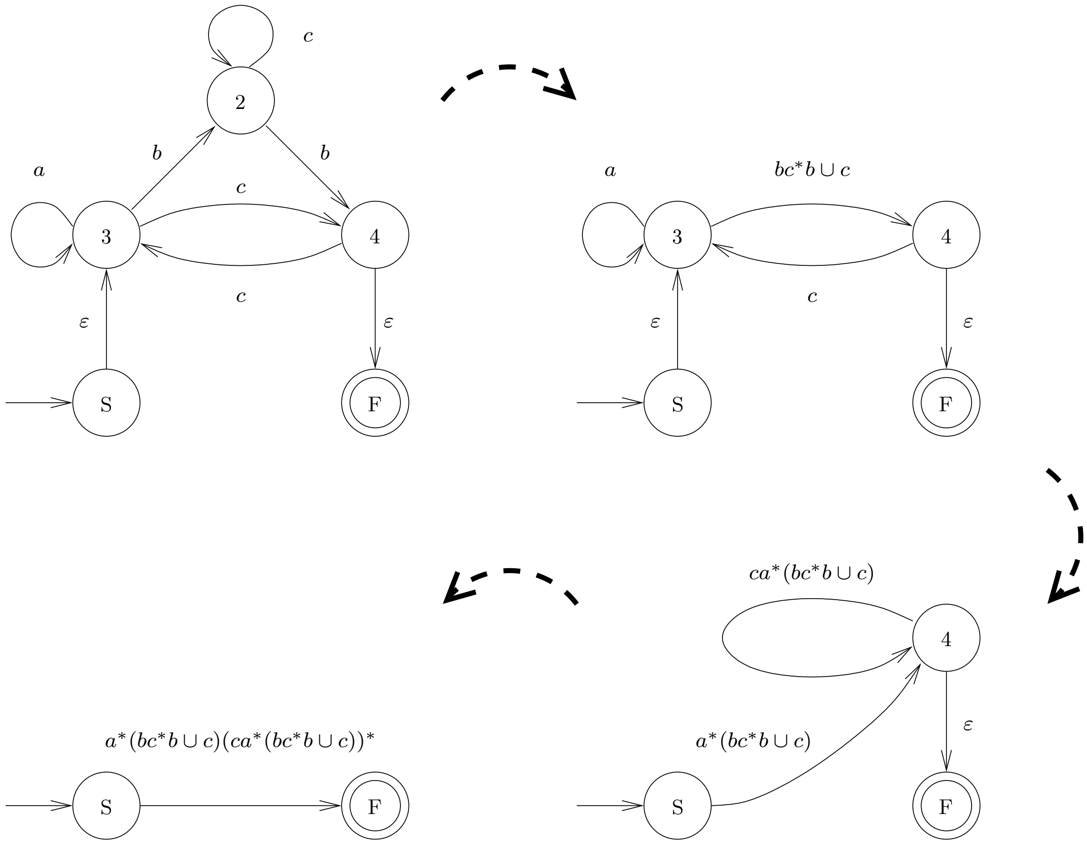


missä on jätetty pois saavuttamattomissa olevat tilat.

4. Lisätään alku- ja lopputila ja numeroidaan tilat. Tyhjä joukko -siirtymät on jätetty merkitsemättä:



Eliminoidaan tilat numerojärjestyksessä:



Siis automaatti tunnistaa kielen $a^*(bc^*b \cup c)(ca^*(bc^*b \cup c))^*$.

5. (a) Olkoon $V_k(w)$ merkkijonon w viimeiset k merkkiä:

$$\begin{aligned} V_k(w) &= w \qquad \text{jos } |\,w\,| < k \\ V_k(w) &= w_{n-k+1} \dots w_n \qquad \text{jos } w = w_1 \dots w_n \text{ missä } n \geq k. \end{aligned}$$

Nyt $A \subseteq \Sigma^*$ on lopusta määräytyvä, jos jollain $k \in \mathbf{N}$ on olemassa sellainen $B \subseteq \Sigma^k$, että $w \in A$, jos ja vain jos $V_k(w) \in B$.

(b) Olkoon A lopusta määräytyvä ja B kuten edellä. Jaetaan B kahteen osaan B_- ja B_+, missä

$$\begin{aligned} B_- &= \{\, v \in B \mid |\,v\,| < k \,\} \\ B_+ &= \{\, v \in B \mid |\,v\,| \geq k \,\}\,. \end{aligned}$$

Nyt $w \in A$, jos ja vain jos $V_k(w) \in B$, jos ja vain jos joko $w \in B_-$ tai $w = uv$ missä $v \in B_+$ ja $u \in \Sigma^*$. Siis $A = B_- \cup (\Sigma^* \circ B_+)$. Koska B_- ja B_+ ovat äärellisiä ja siis säännöllisiä, niin A on säännöllinen.

(c) Olkoon A_1 lopusta määräytyvä ja k_1 ja B_1 sellaiset, että $w \in A_1$, jos ja vain jos $V_{k_1}(w) \in B_1$; vastaavasti A_2, k_2 ja B_2. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa $k_1 \geq k_2$. Olkoon B_2' niiden merkkijonojen $V_{k_1}(v)$ joukko, joilla $V_{k_2}(v) \in B_2$. Nyt

$$\begin{aligned} w \in A_1 \cup A_2 \quad &\Leftrightarrow \quad V_{k_1}(w) \in B_1 \quad \text{tai} \quad V_{k_2}(w) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow \quad V_{k_1}(w) \in B_1 \quad \text{tai} \quad V_{k_1}(w) \in B_2', \end{aligned}$$

joten $A_1 \cup A_2$ on lopusta määräytyvä.

(d) Aakkoston $\Sigma = \{\,0,1\,\}$ kielet $A_1 = \Sigma^*0$ ja $A_2 = \Sigma^*1$ ovat selvästi lopusta määräytyviä. Kieli $A = A_1 \circ A_2$ ei ole lopusta määräytyvä. Millä tahansa k voidaan näet valita sellaiset $x, y \in \Sigma^*$, että $x \in A$, $y \notin A$, mutta $V_k(x) = V_k(y)$; esim. $x = 01^k$ ja $y = 1^{k+1}$.