

582206 Laskennan mallit (syksy 2007)

Harjoitus 1 (3.–7.9.)

Tehtävät kertaavat kursseilla *Johdatus diskreettiin matematiikkaan* ja *Tietorakenteet* opittuja jatkossa tarpeellisia asioita. Näistä asioista on hyvä yhteenveto myös Sipserin kirjan luvussa 0.

1. Tarkastellaan kokonaislukujen joukon \mathbb{Z} osajoukkoja $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{2, 3, 4\}$. Merkinnällä \overline{C} tarkoitetaan joukon C komplementtia:

$$\begin{aligned}\overline{C} &= \mathbb{Z} - C \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin C\}.\end{aligned}$$

Mitä alkioita kuuluu seuraaviin joukkoihin:

(a) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ ja

(b) $\overline{A \cap B}$?

2. Todista induktiolla summakaava

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Olkoon $G = (V, E)$ suunnattu verkko, missä

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{(a, b), (b, c), (c, a), (b, d), (d, e), (e, b), (c, d)\}.$$

Määritä leveysuuntaista läpikäyntiä soveltamalla lyhimmän polun pituus solmusta a kuhunkin verkon muuhun solmuun.

4. Joukon X relaatio \sim on *ekvivalenssirelaatio*, jos kaikilla joukon X alkiolla x, y ja z seuraavat ehdot pätevät:

refleksiivisyys: $x \sim x$

symmetrisyys: jos $x \sim y$, niin $y \sim x$

transiivisuus: jos $x \sim y$ ja $y \sim z$, niin $x \sim z$.

- (a) Olkoon $G = (V, E)$ *suuntaamaton* verkko. Merkitään $u \rightsquigarrow v$, jos verkossa on polku solmusta u solmuun v . Onko relaatio \rightsquigarrow joukon V ekvivalenssirelaatio? Perustele lyhyesti.

- (b) Olkoon $G = (V, E)$ *suunnattu* verkko. Merkitään $u \rightsquigarrow v$, jos verkossa on polku solmusta u solmuun v . Onko relaatio \rightsquigarrow joukon V ekvivalenssirelaatio? Perustele lyhyesti.

5. [Sipser Problem 0.12] Osoita, että jos suuntaamattomassa verkossa on ainakin kaksi solmua, niin siinä on kaksi solmua, joiden aste (naapurien lukumäärä) on sama.