

582206 Laskennan mallit (syksy 2007)

Harjoitus 2 (11.–14.9.)

Perustehtävät

Ratkaise seuraavat tehtävät ennen laskuharjoitustilaisuutta. Jos niissä on jotain epäselvää, valmistaudu kysymään asiasta laskuharjoituksissa.

1. Tarkastellaan kokonaislukujen joukon \mathbb{Z} osajoukkoja $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{2, 3, 4\}$. Mitkä ovat
 - (a) joukon A potenssijoukko $\mathcal{P}(A)$
 - (b) joukkojen A ja B karteesinen tulo $A \times B$?
2. Kuvaa sanallisesti seuraavat joukot:
 - (a) $\{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$
 - (b) $\{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$
 - (c) $\{u \in \Sigma^* \mid \text{jollakin } v \in \Sigma^* \text{ pätee } uv = \text{abrakadabra}\}$, missä $\Sigma = \{a, \dots, z\}$.(Noudatamme tällä kurssilla käytäntöä, että nolla on luonnollinen luku; ts. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.)
3. Määrittele joukkomerkintää käyttäen seuraavat joukot:
 - (a) aakkoston $\{a, b, c, d\}$ palindromit
 - (b) kolmella jaolliset luonnolliset luvut
 - (c) aakkoston $\{0, 1\}$ merkkijonot, joissa kaikki nollat ovat ennen ykkösiä.(Palindromi on merkkijono, joka on sama myös lopusta alkuun luettuna.)

Yhteistehtävät

Lue seuraavat tehtävät huolellisesti ja kertaa tarvittavat käsitteet kurssikirjasta. Valmistaudu osallistumaan tehtävien ratkaisemiseen laskuharjoitustilaisuudessa yhteisvoimin. (Näitä tehtäviä siis *ei* ole tarkoitus ratkaista itsenäisesti etukäteen.)

4. [Sipser Problem 1.51] Olkoon L jokin kieli. Sanomme, että merkkijonot x ja y ovat L -erottuvia, jos jollakin merkkijonolla z tasan yksi merkkijonoista xz ja yz kuuluu kieleen L . Jos x ja y eivät ole L -erottuvia, merkitsemme $x \equiv_L y$. Osoita, että \equiv_L on ekvivalenssirelaatio.
Motivaatio: tämä relaatio on keskeisessä asemassa tarkasteltaessa, kuinka monta tilaa tarvitaan kielen L hyväksyvässä äärellisessä automaatissa.
5. Tehtävänä on laatia ohjausjärjestelmä hissille toimistorakennuksessa.
Kussakin kerroksessa on nappi, jolla voi tilata hissin, ja hissin sisällä on tavalliseen tapaan nappi jokaiselle kerrokselle. Ohjausjärjestelmä saa syötteenä kaikki napinpainallukset sekä lisäksi tiedon aina, kun hissi saapuu johonkin kerrokseen. Ohjausjärjestelmän pitäisi kullakin ajanhetkellä päättää, onko hissi menossa ylös vai alas.
Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että hissi pysähtyy jokaisessa (tyhjässäkin) kerroksessa vakioajan, ts. ovien avaamisia jne. ei tarvitse tässä käsitellä. Oletetaan myös, että syötteet tulevat yksi kerrallaan, ts. nappeja ei painella yhtäikää jne.
Suunnittele sellainen ohjausalgoritmi, että kukaan hissien tarvitsija ei joudu odottamaan loputtomiin. Miten soveltaisit äärellisen automaatin ideaa tällaisen järjestelmän esittämiseen?
6. Todista, että jos $n \geq 4$, niin $2^n \geq n^2$.