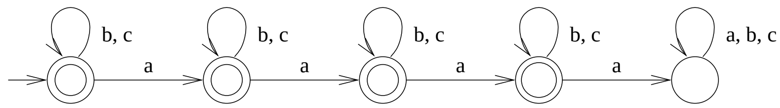
582206 Laskennan mallit (syksy 2007)

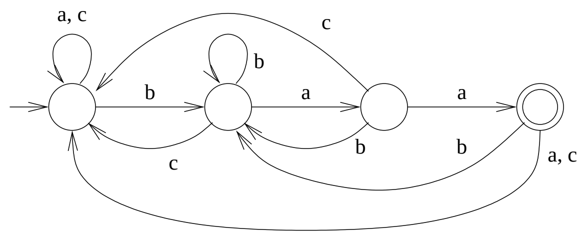
1. kurssikoe 18.10., ratkaisuja

1. (a) DFA:



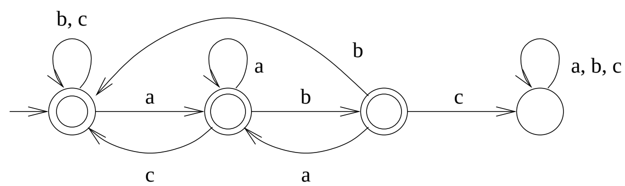
Säännöllinen lauseke: $(\mathrm{b} \cup \mathrm{c})^*(\mathrm{a} \cup \varepsilon)(\mathrm{b} \cup \mathrm{c})^*(\mathrm{a} \cup \varepsilon)(\mathrm{b} \cup \mathrm{c})^*(\mathrm{a} \cup \varepsilon)(\mathrm{b} \cup \mathrm{c})^*$.

(b) DFA:



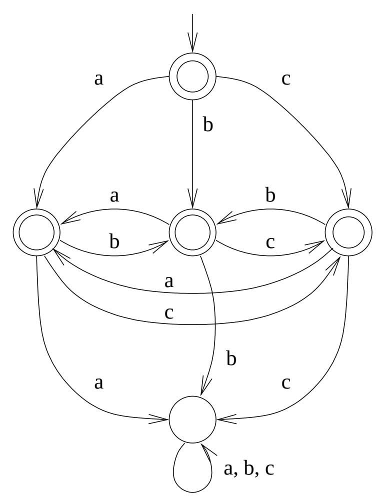
Säännöllinen lauseke: $\Sigma^*\mathrm{baa}$.

(c) DFA:



Säännöllinen lauseke: $(\mathrm{b} \cup \mathrm{c})^*(\mathrm{a}(\varepsilon \cup \mathrm{b} \cup \mathrm{bb}(\mathrm{b} \cup \mathrm{c})^* \cup \mathrm{c}(\mathrm{b} \cup \mathrm{c})^*))^*(\mathrm{a} \cup \mathrm{ab} \cup \varepsilon)$

(d) DFA:



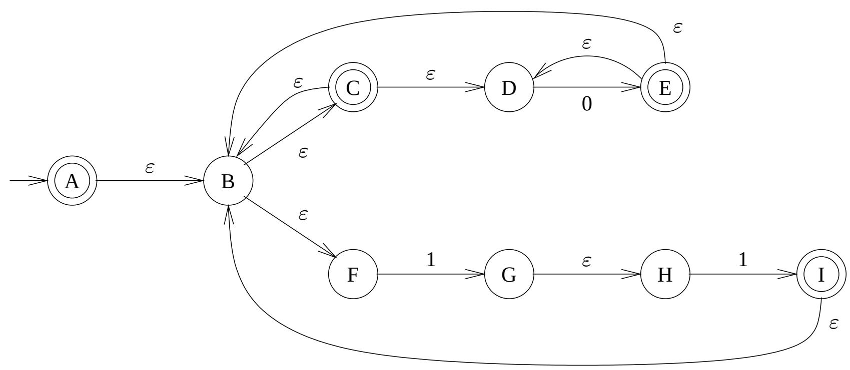
Säännöllinen lauseke: $(\varepsilon \cup \mathrm{c})(\mathrm{bc})^*(\varepsilon \cup \mathrm{b})(\mathrm{a}(\mathrm{b} \cup \mathrm{c} \cup (\mathrm{bc})^+(\varepsilon \cup \mathrm{b}) \cup (\mathrm{cb})^+(\varepsilon \cup \mathrm{c})))^*(\mathrm{a} \cup \varepsilon)$

Arvostelu: Jokaisessa kohdassa yksi piste automaatista ja yksi piste säännöllisestä lausekkeesta. Puolikkaan pisteen sai suurin piirtein oikeasta automaatista tai lausekkeesta.

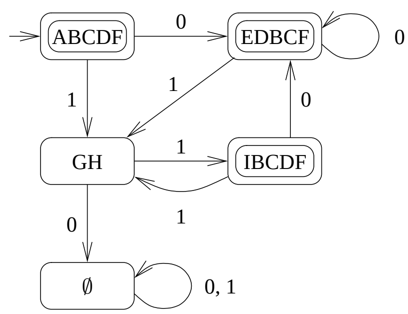
Melko yleinen virhe kohdissa b, c ja d oli esittää automaatti, joka toimii muuten oikein, mutta palaa alkutilaan silloin, kun seuraava merkki ei jatka tunnistettavaa osajonoa. Esimerkiksi kohdassa b tällainen automaatti ei olisi hyväksynyt merkkijonoa bbaa, koska se olisi toisen b:n jälkeen palannut alkutilaan ja pysynyt siellä loppuun asti.

Tällaisesta virheellisestä automaatista sai kohdissa b ja c puolikkaan pisteen. Kohdassa d pisteitä ei saanut, koska automaatin suunnittelemisen kahden merkin mittaisia osajonoja tunnistamaan pitäisi olla kolmen merkin osajonoja helpompaa.

2. NFA (tilat nimetty A–I jatkoa varten):

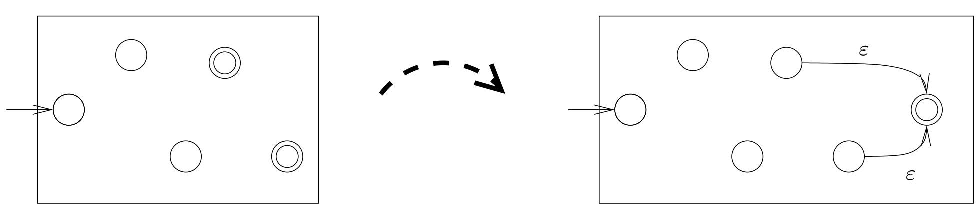


DFA:



Arvostelu: Kolme pistettä epädeterministisestä automaatista ja toiset kolme pistettä deterministisestä automaatista, jos nämä oli muodostettu luennoilla esitetyillä menetelmillä. Oikean kielen tunnistavasta aidosti epädeterministisestä automaatista sai aina vähintään puolitoista pistettä ja saattoi saada enemmänkin, jos se oli lähellä oikeaa vastausta. Deterministisen automaatin pisteytys perustui siihen, kuinka oikein luennoilla esitettyä menetelmää oli sovellettu opiskelijan esittämään epädeterministiseen automaattiin.

3. (a) Lisätään automaattiin uusi tila, josta tulee ainoa hyväksyvä tila. Vanhoista hyväksyvistä tiloista tulee ε-siirtymät uuteen hyväksyvään tilaan. Kuva:



Muodollisesti, jos on alkuperäinen NFA on $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, muodostetaan uusi NFA $N = (Q \cup \{ q_F \}, \Sigma, \delta', q_0, \{ q_F \})$, missä $q_F \notin Q$ ja δ' on seuraava:

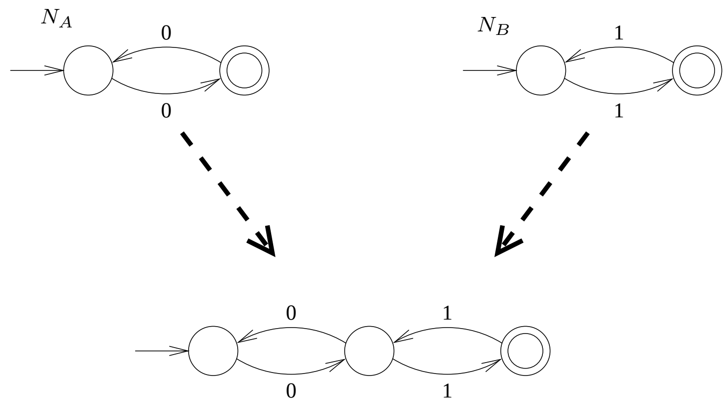
- $\delta'(q_F, a) = \emptyset$ kaikilla $a \in \Sigma \cup \{ \varepsilon \}$
- jos $q \in F$, niin $\delta'(q, \varepsilon) = \delta(q, \varepsilon) \cup \{ q_F \}$
- muuten $\delta'(q, a) = \delta(q, a)$.

Arvostelu: Maksimin 2 pistettä sai, jos konstruktion perusidea oli selitetty oikein ja muodollinen esitys oli suunnilleen kunnossa. Monessa vastauksessa muodollinen esitys puuttui kokonaan tai oli pahasti virheellinen; tällaisesta vastauksesta sai yhden pisteen. Moni oli myös sotkenut tähän yleistetyt automaatit (GNFA); tällaisesta ratkaisusta ei saanut pisteitä, paitsi jos konstruoitu GNFA oli itse asiassa NFA.

(b) Tehtävässä esitetty konstruktio ei itse asiassa edes tuota kelvollista automaattia kaikissa tilanteissa. Jos $q_B \in \delta_B(q, a)$ joillain $q \in Q_B$ ja $a \in \Sigma$, niin konstruoitu $\delta(q, a)$ ei edes ole uuden tilajoukon Q osajoukko. Lisäksi jos $q_{F,B} = q_B$, uuden automaatin hyväksyvä tila ei ole hyvin määritelty.

Tarkastellaan nyt, miten konstruktio toimisi, jos edellä mainitut virheet oletetaan korjatuiksi: Jos $q_B \in \delta_B(q, a)$ jollain $q \in Q_B - \{ q_B \}$, niin määritelläänkin $\delta(q, a) = \delta_B(q, a) - \{ q_B \} \cup \{ q_{F,A} \}$. Lisäksi jos $q_B \in \delta_B(q_B, a)$, niin $\delta(q_{F,A}, a) = \delta_A(q_{F,A}, a) \cup \delta_B(q_B, a) - \{ q_B \} \cup \{ q_{F,A} \}$. Jos $q_{F,B} = q_B$, asetetaan $q_F = q_{F,A}$.

Annetun konstruktion idea on, että automaatin N_A hyväksyvä tila ja automaatin N_B alkutila yhdistetään, jolloin tämän tilan kautta suoritus pääsee siirtymään automaatista N_A automaattiin N_B. Tämä ei kuitenkaan sellaisenaan toimi, koska samalla tulee sallituksi siirtymät myös takaisin automaatista N_B automaattiin N_A. Esimerkki:



Tässä N_A hyväksyy merkkijonot, jotka koostuvat parittomasta määrästä nollia, ja N_B merkkijonot, jotka koostuvat parittomasta määrästä ykkösia. Nyt konstruktion tuottama automaatti hyväksyy myös merkkijonoja, joissa ykkösten jälkeen tulee taas nollia ja jotka siis eivät kuulu kieleen $L(N_A) \circ L(N_B)$.

Jos kuitenkin N_A on muodostettu (a)-kohdassa esitetyllä tavalla jostain toisesta automaatista, konstruktio toimii. Tämä perustuu siihen, että nyt automaatissa N_A ei ole mitään siirtymiä tilasta $q_{F,A}$. Itse asiassa jos otetaan mielivaltaiset N_A ja N_B, sovelletaan ensin (a)-kohdan konstruktiota automaattiin N_A ja sen jälkeen (b)-kohdan konstruktiota saatuun uuteen automaattiin ja automaattiin N_B, tulos on tasan sama, kuin jos sovellettaisiin automaatteihin N_A ja N_B luennolla esitettyä konstruktiota kielelle $L(N_A) \circ L(N_B)$ (joka tunnetusti toimii).

Arvostelu: Täydet kaksi pistettä sai joko toteamalla konstruktion muodollisesti virheelliseksi alussa mainituilla perusteilla tai tutkimalla konstruktiota edellä esitettyyn tapaan sivuuttaen muodolliset virheet. Yhden pisteen sai, jos ratkaisusta selvästi kävi ilmi, että tehtävän konstruktio oli ymmärretty oikein tai että opiskelija tiesi oikean tavan tehdä kyseinen konstruktio.

Melko yleinen tyyppi puutteellisia vastauksia oli todeta, että tehtävän konstruktio ei ole sama kuin luennoilla esitetty, ilman että sen toimivuutta olisi muuten mietitty. Tällaisesta ratkaisusta on voinut saada yhden pisteen edellä esitetyllä perusteella.

(c) **Lause:** Kieltä $0^* \cup 1^*$ ei voi tunnistaa deterministisellä äärellisellä automaatilla, jossa on vain yksi hyväksyvä tila.

Todistus: Olkoon $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ deterministinen äärellinen automaatti, joka tunnistaa kielen $A = 0^* \cup 1^*$. Koska $00 \in A$, niin $\delta(\delta(q_0, 0), 0) \in F$; koska $10 \notin A$, niin $\delta(\delta(q_0, 1), 0) \notin F$. Siis $\delta(\delta(q_0, 0), 0) \neq \delta(\delta(q_0, 1), 0)$, joten $\delta(q_0, 0) \neq \delta(q_0, 1)$. Koska $0 \in A$, niin $\delta(q_0, 0) \in F$;

koska $1 \in A$, niin $\delta(q_0, 1) \in F$. Siis joukossa F on ainakin kaksi eri tilaa, nimittäin $\delta(q_0, 0)$ ja $\delta(q_0, 1)$. $\square$

Vaihtoehtoinen todistus: Olkoon annettu jokin DFA, jossa on vain yksi hyväksyvä tila ja joka hyväksyy kaikki kielen $0^* \cup 1^*$ merkkijonot (sekä mahdollisesti lisäksi joitain muita). Koska tyhjä merkkijono kuuluu kieleen, automaatin alkutila on hyväksyvä. Oletuksen mukaan muita hyväksyviä tiloja ei siis ole. Koska merkkijono 0 kuuluu kieleen, alkutilasta on merkillä 0 siirtymä takaisin itseensä. Samoin koska merkkijono 1 kuuluu kieleen, alkutilasta on myös merkillä 1 siirtymä takaisin itseensä. Automaatti hyväksyy siis itse asiassa kaikki merkkijonot.

Siis vain yhden hyväksyvän tilan sisältävä DFA ei voi hyväksyä täsmälleen kieleen $0^* \cup 1^*$ kuuluvia merkkijonoja. $\square$

Arvostelu: Yhden pisteen on saanut oikeasta ei-vastauksesta, jolle on myös osattu perustella hieman mutta ei loppuun asti. Kaksi pistettä on vaatinut melko täydellisen todistuksen.

Muutama opiskelija oli konstruoinut annetulle kielelle DFA:n kurssilla esitetyllä menetelmällä ja todennut, että hyväksyviä tiloja on useita. Kyseinen menettely ei kuitenkaan mitenkään minimoi hyväksyvien tilojen määrää, eikä sen lopputuloksesta voi päätellä, saisiko jollain muulla tavalla ”paremman” automaatin samalle kielelle.

4. **Lause:** Jos A ja B ovat säännöllisiä kieliä, niin kieli

$$C = \{ \textsc{Parit}(a, b) \mid a \in A, b \in B, |a| = |b| \}$$

on säännöllinen.

Todistus: Olkoot $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$ ja $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$ deterministisiä äärellisiä automaatteja, jotka hyväksyvät kielet A ja B. Muodostetaan deterministinen äärellinen automaatti $M = (Q, \Sigma \times \Sigma, \delta, q_0, F)$ seuraavasti:

- $Q = Q_A \times Q_B$
- $q_0 = (q_A, q_B)$
- $F = F_A \times F_B$
- $\delta((r, s), (a, b)) = (\delta_A(r, a), \delta_B(s, b))$ kaikilla $(r, s) \in Q$ ja $(a, b) \in \Sigma \times \Sigma$.

Tarkastellaan automaatin M laskentaa syötteellä $w = (a_1, b_1) \dots (a_n, b_n) = \textsc{Parit}(a, b)$, missä $a = a_1 \dots a_n$ ja $b = b_1 \dots b_n$. Merkitään laskennan aikana vierailtavia tiloja $(r_0, s_0), \dots, (r_n, s_n)$. Siis automaatissa M suoritetaan laskenta

$$(r_0, s_0) \stackrel{(a_1,b_1)}{\longrightarrow} (r_1, s_1) \stackrel{(a_2,b_2)}{\longrightarrow} \dots \stackrel{(a_n,b_n)}{\longrightarrow} (r_n, s_n).$$

Automaatin M määritelmästä nähdään, että tällöin automaatissa M_A on laskenta

$$r_0 \stackrel{a_1}{\to} r_1 \stackrel{a_2}{\to} \dots \stackrel{a_n}{\to} r_n$$

ja automaatissa M_A laskenta

$$s_0 \stackrel{b_1}{\to} s_1 \stackrel{b_2}{\to} \dots \stackrel{b_n}{\to} s_n.$$

Siis $r_n \in F_A$, jos ja vain jos $a \in A$, ja $s_n \in F_B$, jos ja vain jos $b \in B$. Tästä seuraa, että $(r_n, s_n) \in F$, jos ja vain jos $w = \textsc{Parit}(a, b)$, missä $a \in A$ ja $b \in B$. Siis automaatti M tunnistaa kielen C. $\square$

Arvostelu: Yhden pisteen on saanut, jos on osoittanut jotain ymmärrystä siitä, millä periaatteella tällaisia tehtäviä ratkaistaan. Lisäpisteiden saaminen on edellyttänyt, että todistusyritys on selvästi edennyt lähtökuoppien ohi. Täysiin pisteisiin on riittänyt oikean konstruktion esittäminen ilman kummempia perusteluja. Kolme pistettä on saanut ratkaisusta, jossa on oikea perusidea lukuunottamatta yhtä hyvällä tahdolla huolimattomuudeksi tulkittavissa olevaa virhettä.