

582206 Laskennan mallit (syksy 2007)

2. kurssikoe 10.12., ratkaisuja

1. (a) Kieli $A_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ voidaan tuottaa yhteydettömällä kieliopilla

$$S \rightarrow aSb \mid \varepsilon.$$

- (b) Kieli A_2 koostuu merkkijonoista, joiden pituus on tasan jaollinen kolmella. Kieli voidaan tuottaa yhteydettömällä kieliopilla

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XXXS \mid \varepsilon \\ X &\rightarrow a \mid b \mid c. \end{aligned}$$

- (c) Kieli $A_3 = \{a^m b^{m+n} c^n \mid m, n \geq 0\}$ voidaan tuottaa yhteydettömällä kieliopilla

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XSY \mid \varepsilon \\ X &\rightarrow aXb \mid \varepsilon \\ Y &\rightarrow bYc \mid \varepsilon. \end{aligned}$$

- (d) Kieli A_4 koostuu merkkijonoista, joissa a-merkkejä on tasan yhtä monta kuin b- ja c-merkkejä yhteensä. Kieli voidaan tuottaa yhteydettömällä kieliopilla

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XSY \mid YSX \mid SS \mid \varepsilon \\ X &\rightarrow a \\ Y &\rightarrow b \mid c. \end{aligned}$$

Arvostelu: Kustakin kohdasta on voinut saada 2 pistettä. Pienistä virheistä on vähennetty 0,5 pistettä, isoista enemmän.

2. Kieli B muodostuu kaikista aakkoston $\{a, b, c\}$ merkkijonoista, joissa a-merkkejä on ainakin yhtä monta kuin b- ja c-merkkejä yhteensä.

Lause: Kieli B ei ole säännöllinen.

Todistus: Tehdään vastaoletus, että kieli B on säännöllinen. Tällöin sillä on pumppauspituus p .

Valitaan $s = a^p b^p$. Koska $|s| \geq p$, voidaan kirjoittaa $s = xyz$, missä

- (a) $xy^i z \in B$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$
- (b) $|y| > 0$ ja
- (c) $|xy| \leq p$.

Ehdon (c) perusteella $xy = a^n$ jollain $n \leq p$, ja siis $y = a^m$ jollain $m \leq n$. Siis $xz = a^{p-m} b^p$. Ehdon (b) perusteella $m > 0$, joten $p - m < p$ ja $xz \notin B$. Tämä on ristiriita ehdon (i) kanssa arvolla $i = 1$. \square

Vaihtoehtoinen todistus (ilman pumppauslemmaa): Tarkastellaan mielivaltaista äärellistä automaattia M . Olkoon automaatin tilojen lukumäärä k . Olkoot q_0, \dots, q_k ne tilat, joiden kautta automaatti kulkee syötteellä a^k . Siis automaatissa on siirtymät

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} \dots \xrightarrow{a} q_{k-1} \xrightarrow{a} q_k.$$

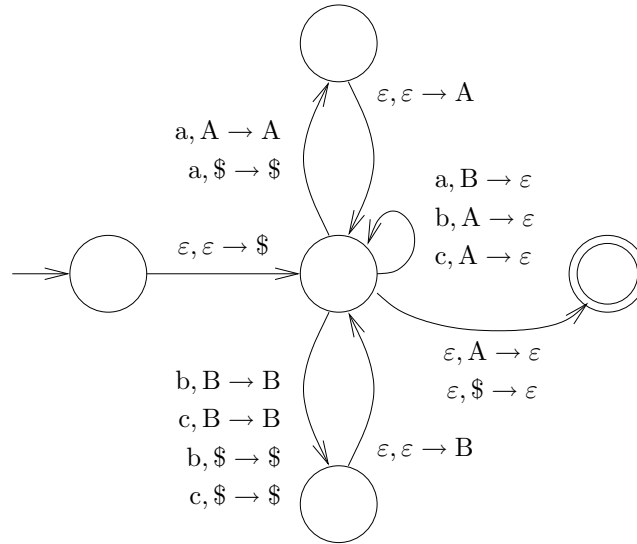
Koska eri tiloja on k kappaletta, jonossa (q_0, \dots, q_k) esiintyy ainakin yksi tila q vähintään kahdessa paikassa. Olkoon siis $q_i = q_j = q$, missä $i \neq j$. Olkoon q' tila, johon automaatti päätyy tilasta q syötteellä b^i . Koska $q = q_i = q_j$, alkutilasta q_0 päädytään tilaan q sekä syötteellä a^i että syötteellä a^j . Siis tilaan q' päädytään sekä syötteellä $a^i b^i$ että syötteellä $a^j b^i$. Jos q' on hyväksyvä tila, M hyväksyy

merkkijonon $a^j b^i$, joka ei kuulu kieleen B . Jos q' ei ole hyväksyvä tila, M ei hyväksy merkkijonoa $a^i b^i$, joka kuuluu kieleen B . Siis kummassakaan tapauksessa M ei tunnista kieltä B .

Olemme siis todenneet, että mikään äärellinen automaatti M ei tunnista kieltä B . \square

Arvostelu: Tyypillisin virhe oli, että oli yritetty soveltaa pumppauslemmaa, mutta lemmän perusrakenne oli tulkittu jotenkin väärin (esim. vaadittu, että ehtojen (a)–(c) pitäisi päteä *kaikille* tavoille jakaa s osiin x , y ja z). Tällaisesta yrityksestä on saanut 1–2 pistettä, jos siinä kuitenkin on oikeita elementtejä.

3. Seuraava pinoautomaatti tunnistaa tehtävässä 2 esitetyn kielen B :



Pinossa pidetään kirjaa luettujen a-merkkien ja luettujen b- ja c-merkkien erotuksesta. Jokainen A pinossa vastaa yhtä luettua a-merkkiä, jokainen B yhtä b- tai c-merkkiä. Jos luetaan a, niin pinosta eliminoiduu yksi B (jos sellaisia on) tai sinne viedään yksi A. Jos luetaan b tai c, niin pinosta eliminoiduu yksi A (jos sellaisia on) tai sinne viedään yksi B. Hyväksyminen tapahtuu, jos syötteen loppuessa pino on tyhjä tai sisältää vain A-merkkejä.

Arvostelu: 1 piste pinoautomaatista, joka tekee jotain asiaan liittyvää
 2 pistettä ratkaisusta, jossa ollaan oikeilla jäljillä, mutta logiikassa on jokin ratkaiseva puute; tähän luokkaan on myös laskettu ratkaisut, joissa tunnistettava kieli on ymmärretty väärin (tyypillisesti vaatimalla, että a-merkkien pitäisi olla ennen b- ja c-merkkejä)
 3 pistettä suunnilleen oikeasta ratkaisusta, jossa kuitenkin on yksi paha tai pari pienempää virhettä; erityisesti tähän luokkaan tuli sellaisia ratkaisuja, joissa oli käytetty epädeterminismiä huolimattomasti niin, että automaatti hyväksyy kaikki a-merkkiin päättyvät merkkijonot.

4. Turingin koneen pysähtymisongelma on kieli

$$HALT_{TM} = \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ on Turingin kone, joka pysähtyy syötteellä } w \}.$$

Tässä $\langle M, w \rangle$ on koodi, joka esittää Turingin koneen M ja merkkijonon w muodostaman parin sopivasti valitussa aakkostossa. Siis kieleen $HALT_{TM}$ kuuluu sopivasti koodattuna jokaiselle Turingin koneelle M pari $\langle M, w \rangle$ kaikille niille syötteille w , joilla M pysähtyy. Kieli $HALT_{TM}$ on Turing-tunnistettava, mutta ei ratkeava.

Normaaleilla yleiskäyttöisillä ohjelmointikielillä tunnetusti voidaan esittää samat asiat kuin Turingin koneilla. Turingin koneiden pysähtymisongelman ratkeamattomuudesta siis seuraa, että esim. Java-kielen pysähtymisongelma

$$HALT_{Java} = \{ \langle P, w \rangle \mid P \text{ on Java-ohjelma, joka pysähtyy syötteellä } w \}$$

ei ole ratkeva Turingin koneella. Tästä edelleen seuraa, että $HALT_{Java}$ ei ole ratkeava Java-kielellä. Siis ei ole olemassa esim. Java-kielistä ohjelmaa, joka lukee syötteenä Java-ohjelman P ja merkkijonon w ja palauttaa 1 jos P syötteellä w pysähtyy, ja palauttaa 0 jos P syötteellä w ei pysähdy.

Koska pysähtymisongelma on kuitenkin Turing-tunnistettava, on mahdollista laatia Java-ohjelma, joka lukee syötteenä Java-ohjelman P ja merkkijonon w ja palauttaa 1 jos P syötteellä w pysähtyy, ja jää silmukkaan jos P syötteellä w ei pysähdy. (Tietysti tiedämme muutenkin, että tämä on mahdollista, koska Javalla voidaan kirjoittaa Java-tulkki.)

Arvostelu: Periaatteessa on annettu 2 pistettä ongelman määritelmän esittämisestä, 2 pistettä sen ratkeamattomuuden ja tunnistettavuuden toteamisesta ja 2 pistettä seurauksien selittämisestä ohjelmointikielille. Arvostelu on kuitenkin tehty melko kokonaisvaltaisesti, ja pysähtymisongelman toteamisesta ratkeamattomaksi on saanut vain yhden pisteen, jos muun tekstin perusteella ei ole syytä olettaa, opiskelijan ollenkaan ymmärtäneen, mitä ”pysähtymisongelma” tai ”ratkeamattomuus” tarkoittaa.

Vastauksissa esiintyi monenlaisia käsitteellisiä sekaannuksia, joista on syytä huomata esim. seuraavaa:

- ”Pysähtymisongelma” on tosiaan ylläesitetty kieli $HALT_{TM}$, tai vähemmän formaalisti laskennallinen ongelma

Annettu: Turingin kone M , merkkijono w

Kysymys: pysähtyykö M syötteellä w .

Siis ”pysähtymisongelma” ei viittaa siihen kenties ongelmalliselta tuntuvaan asiantilaan, että tämä laskennallinen ongelma on ratkeamaton.

- Pysähtymisongelman ratkeamattomuuden soveltaminen esim. Java-kieleen ei edellytä Churchin-Turingin teesiä, sillä voimme kyllä nähdä kiistattomasti (kohtuullisten yksinkertaistusten jälkeen), että Java ja Turingin koneet ovat yhtä laskentavoimaisia. Churchin-Turingin teesi tässä yhteydessä väittää, että millään muullakaan mahdollisesti tulevaisuudessa keksittäväällä laskentalaitteella ei voida ratkaista pysähtymisongelmaa (sen paremmin Turingin koneille kuin Javalle).
- *Kieli* on joukko merkkijonoja; sillä ei ole mitään syötettä, se ei pysähdy jne.; kieli voi olla ratkeava tai ratkeamaton (tai säännöllinen jne.)
- *Turingin kone* on laskentalaitte, joka voi saada syötteen ja pysähtyä; se ei ole ratkeava tai ratkeamaton.
- Sen paremmin mikään kieli kuin Turingin konekaan ei ole ”ratkeava syötteellä w ” tms.