582206 Laskennan mallit, lähtötasotesti ja ratkaisuja (syksy 2008)

Tämän lähtötasotestin tehtävien ratkaisemisesta saa hyvitystä sen mukaan, kuinka monta tehtävää on ratkaissut oikein. Hyvitys tulee ylimääräisten laskuharjoituspisteiden muodossa siten, että kaikkien testin tehtävien ratkaiseminen vastaa neljää tehtyä laskuharjoitustehtävää.

Lähtötasotestin tuloksia käytetään apuna opetuksen kehittämisessä.

nimi: **opiskelijanumero:**

1. Taulukossa $A[1\,..\,n]$ on n kokonaislukua järjestyksessä pienimmästä suurimpaan. Tehtävänä on etsiä annetun kokonaisluvun x sijainti taulukossa, kun oletetaan, että etsitty luku x todella esiintyy taulukossa A tasan kerran. Ongelma voidaan ratkaista kurssilta *Tietorakenteet* tutulla binäärihaulla:

```
BINARY-SEARCH(A[1..n], x)
left ← 1
right ← n
while left < right
      do
         mid ← ⌊(left + right)/2⌋
         if A[mid] < x
            then left ← mid + 1
            else right ← mid
return A[left] = x
```

Mikä on algoritmissa esiintyvän silmukan invariantti? (Invariantin esittäminen sanallisesti riittää, mitään erityistä formalismia tai perusteluja ei tarvita.)

Vastaus: Invariantti on, että x on osataulukossa $A[\mathit{left}\,..\,\mathit{right}]$. (Tai että $A[\mathit{left}] \leq x \leq A[\mathit{right}]$; tässä siis oletetaan, että x on taulukossa).

2. Todista induktiolla geometrisen sarjan summakaava

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad \text{kaikilla } x \neq 1.$$

Vastaus: Perustapaus $n = 0$: väite yksinkertaistuu muotoon $\sum_{k=0}^{0} x^k = \frac{x^1-1}{x-1}$, joka on selvästi tosi, koska $x^0 = 1$.

Tehdään nyt induktio-oletus, että väite pätee, kun $n = m$, ja todistetaan väite, kun $n = m + 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} x^k &= \sum_{k=0}^{m} x^k + x^{m+1} \\
&\overset{\text{ind.ol}}{=} \frac{x^{m+1}-1}{x-1} + x^{m+1} \\
&= \frac{x^{m+1}-1}{x-1} + \frac{x^{m+1}(x-1)}{x-1} \\
&= \frac{x^{m+1}-1+x^{m+2}-x^{m+1}}{x-1} \\
&= \frac{x^{(m+1)+1}-1}{x-1}
\end{aligned}$$

kuten haluttiin. □

3. Todista joukko-opin yhtälö $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$. Tässä siis $X - Y$ tarkoittaa joukkojen erotusta: $X - Y = \{\, x \in X \mid x \notin Y \,\}$.

   Vastaus:

$$\begin{aligned}
x \in A - (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ ja } x \notin (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ ja ei } (x \in B \text{ ja } x \in C) \\
&\Leftrightarrow x \in A \text{ ja } (x \notin B \text{ tai } x \notin C) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ ja } x \notin B) \text{ tai } (x \in A \text{ ja } x \notin C) \\
&\Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C).
\end{aligned}$$

4. Tarkastellaan kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ osajoukkoja $A = \{\, 0, 2, 4 \,\}$ ja $B = \{\, 1, 2, 3 \,\}$. Mitä alkioita kuuluu seuraaviin joukkoihin:

   (a) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ ja

   (b) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$?

   Merkinnällä $\overline{C}$ tarkoitetaan joukon C komplementtia: $\overline{C} = \mathbb{Z} - C$.

   Vastaus: Joukko $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ on joukkojen A ja B *symmetrinen erotus*, jota usein merkitään $A \Delta B$. Siihen kuuluvat ne alkiot, jotka kuuluvat toiseen joukoista A ja B, mutta ei molempiin. Siis $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \{\, 0, 1, 3, 4 \,\}$.

   Koska $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ kaikilla X ja Y (De Morgan), niin

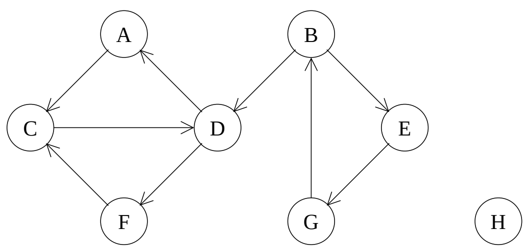
$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B = \{\, 0, 1, 2, 3, 4 \,\}\,.$$

5. Määritellään suuntaamaton verkko $G = (V, E)$, missä $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ ja $E = \{ (i, j) \in V \times V \mid |i - j| \leq 2 \}$. Onko verkko G yhtenäinen? Entä onko se puu? Perustele lyhyesti.

   Vastaus: Verkko on yhtenäinen, koska minkä tahansa kahden solmun välillä on polku; esim. polku $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$ sisältää kaikki verkon solmut.

   Verkko ei ole puu, koska siinä on syklejä, esim. $1 \to 2 \to 3 \to 1$.

6. Mitkä ovat seuraavan suunnatun verkon vahvasti yhtenäiset komponentit?



   Vastaus:

   - $\{ A, C, D, F \}$
   - $\{ B, E, G \}$
   - $\{ H \}$