

Vaihtoehtoinen tulkinta pumppauslemmalle

Ajatellaan tilanne pelinä, jonka osapuolina ovat *Todistaja* ja *Vastustaja*.

Todistaja yrittää todistaa annetun kielen L ei-säännölliseksi osoittamalla, että sillä ei ole pumppausominaisuutta. *Vastustaja* yrittää kumota tämän yrityksen.

Jos *Todistaja* voittaa pelin, kieli ei ole säännöllinen.

Jos *Vastustaja* voittaa, kysymys jää auki: kieli voi olla säännöllinen tai ei-säännöllinen. (Myös ei-säännöllisellä kielellä saattaa olla pumppausominaisuus.)

Koska pumppauslemmalla yleensä yritämme todistaa kielen ei-säännölliseksi, toivomme, että *Todistaja* voittaa. Pelin täytyy silti olla reilua ja *Vastustajalle* pitää antaa sille kuuluvat mahdollisuudet, että johtopäätökset pelin lopputuloksesta olisivat perusteltuja.

Tiivistelmä pelin kulusta

1. *Vastustaja* valitsee luvun p , jota väittää kielen L pumppauspituudeksi.
2. *Todistaja* valitsee kielestä L merkkijonon s , jonka pituus on vähintään p .
3. *Vastustaja* valitsee merkkijonon s jaon kolmeen osaan x , y ja z , joilla siis $s = xyz$.
4. Jos nyt on voimassa pumppausehdot
 - (a) $xy^iz \in L$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$
 - (b) $|y| > 0$ ja
 - (c) $|xy| \leq p$,niin *Vastustaja* voitti. Muuten *Todistaja* voitti.

Käymme nyt tämän läpi yksityiskohtaisemmin.

Peli alkaa sillä, että *Todistaja* haastaa *Vastustajan* ilmoittamaan kielen pumppauspituuden.

Ajattelemme tässä, että pelaajat *Todistaja* ja *Vastustaja* ovat kaikkitietäviä ja yrittävät (mahdollisesti vilpillisesti) saada ulkopuolisen tarkkailijan vakuuttuneeksi oman väitteensä oikeellisuudesta.

Siis erityisesti jos kieli on säännöllinen, *Vastustaja* tietää esim. mikä DFA sen tunnistaa, ja voi antaa pumppauspituudeksi p kyseisen DFA:n tilojen lukumäärän. Pumppauslemman todistuksesta tiedämme, että tämä p todella on kielen pumppauspituus, joten *Todistaja* pakosta häviää kaikki yrityksensä.

Jos kieli ei ole säännöllinen, *Vastustajan* pitää valehdella ja väittää jotain lukua p pumppauspituudeksi. *Todistajan* tehtävä on paljastaa tämä valhe.

Mielenkiintoinen tapaus on siis se, jossa kieli ei ole pumpattavissa ja *Vastustajan* väittämä pumppauspituus p pitää osoittaa valheelliseksi.

Pumppauspituuden määritelmän mukaan *Vastustaja* siis väittää, että mikä tahansa s voidaan jakaa sopiviin osiin x , y ja z , kunhan ehdot $s \in L$ ja $|s| \geq p$ pätevät.

Todistajan riittää siis osoittaa yksikin ehdot täyttävä s , jolle sopivaa jakoa $s = xyz$ ei löydy. Valinnassaan todistaja voi tietysti käyttää hyväkseen paitsi tarkasteltavan kielen L erityispiirteitä myös sitä, että *Vastustaja* on jo kiinnittänyt väitetyn pumppauspituuden p .

Kun *Todistaja* on kiinnittänyt merkkijonon s , on *Vastustajan* vuoro valita x , y ja z , minkä jälkeen pelin lopputulos selviää.

Huomaa, että *Vastustajan* riittää puolestaan osoittaa *Todistajan* valitsemalle s yksikin ehdot täyttävä jako $s = xyz$.

Todistajan pitää siis valita s siten, että *mikään mahdollinen* jako $s = xyz$ ei toteuta ehtoja. Kun haluamme osoittaa, että *Todistaja* voittaa, meidän on siis tarkasteltava *kaikkia* mahdollisia jakoja ja osoitettava, että *mikään* niistä ei toteuta ehtoja.

Jos *Todistaja* saisi valita myös jaon, hänen tehtävänsä olisi liian helppo ja hän voittaisi pelin käytännössä aina, oli kieli säännöllinen tai ei.

Yhteenveto pelistä

1. *Vastustaja* valitsee luvun p .
2. *Todistaja* valitsee merkkijonon $s \in L$, jolla $|s| \geq p$.
3. *Vastustaja* valitsee jaon $s = xyz$.
4. Jos nyt on voimassa pumppausehdot
 - (a) $xy^iz \in L$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$
 - (b) $|y| > 0$ ja
 - (c) $|xy| \leq p$,

niin *Vastustaja* voitti. Muuten *Todistaja* voitti.

Pumppauslemman nojalla jos L on säännöllinen, niin *Vastustajalla* on voittostrategia (ts. oikein pelaamalla hän voittaa aina).

Siis jos *Todistajalla* onkin voittostrategia, kieli ei ole säännöllinen.

On myös mahdollista, että kieli ei ole säännöllinen, mutta *Vastustajalla* sattuu silti olemaan voittostrategia. Tällöin tämä lähestymistapa ei toimi kielen ei-säännöllisyyden todistamiseksi.