581336 Laskennan teoria (kevät 2006)

Kurssikoe 4.5. kello 9–12 sali B123

Kaikissa tehtävissä saat käyttää hyväksi mitä tahansa kurssilla todistettuja tuloksia, kunhan toteat selvästi, mikä on se tulos jota käytät.

1. [*12 pistettä*] Kun $w \in \{0, 1\}^n$, olkoon $f(w)$ merkkijono, jossa on yhtä monta 1-merkkiä kuin merkkijonossa w, mutta ei yhtään 0-merkkiä. Siis $f(w) = 1^k$, missä k on 1-merkkien lukumäärä merkkijonossa w. Esitä siirtymäkaaviona Turingin kone, joka laskee funktion f. Koneen toimivuutta ei tarvitse erikseen perustella.

2. [*15 pistettä*]

   (a) Jos tiedetään, että on olemassa rekursiivinen palautus $A \leq_{\mathrm{m}} B$, mutta ei tiedetä mitään muuta, niin mitkä seuraavista neljästä tilanteesta ovat mahdollisia:

$$A \in \mathrm{REC} \quad \text{ja} \quad B \in \mathrm{REC} \tag{1}$$
$$A \in \mathrm{REC} \quad \text{ja} \quad B \notin \mathrm{REC} \tag{2}$$
$$A \notin \mathrm{REC} \quad \text{ja} \quad B \in \mathrm{REC} \tag{3}$$
$$A \notin \mathrm{REC} \quad \text{ja} \quad B \notin \mathrm{REC} \tag{4}$$

   (b) Jatkossa tarkastellaan seuraavaa *komplementtiongelmaa*

   Annettu: Turingin koneet M_1 ja M_2

   Kysymys: ovatko koneiden M_1 ja M_2 hyväksymät kielet toistensa komplementteja (ts. päteekö, että kaikilla x tasan yksi koneista M_1 ja M_2 hyväksyy syötteen x).

   sekä luennoilta tuttua (ratkeamattomaksi tiedettyä) tyhjyysongelmaa

   Annettu: Turingin kone M

   Kysymys: onko koneen M hyväksymä kieli tyhjä.

   Esitä kumpikin ongelma formaalina kielenä.

   (c) Halutaan osoittaa komplementtiongelma ratkeamattomaksi tekemällä sopiva palautus ja käyttämällä hyväksi tietoa, että tyhjyysongelma on ratkeamaton. Millainen palautus tähän tarvitaan: millaisia argumentteja palautusfunktio saa ja millaisia arvoja palauttaa, ja mitä ehtoja näiden pitää toteuttaa?

   (d) Esitä edellisen kohdan kuvauksen mukainen palautusfunktio. (Tässä riittää pelkkä funktion määritteleminen ilman lisäselityksiä.)

Käännä!

3. [*15 pistettä*] Ilmoita kustakin seuraavista ongelmista, mitä tiedät tai voit päätellä sen ratkeavuudesta, osittaisesta ratkeavuudesta ja ratkeavuudesta polynomisessa ajassa. Perustele vastauksesi.

   (a) **Annettu:** suuntaamaton verkko $G = (V, E)$
   Kysymys: onko olemassa sellainen $U \subset V$, että $|U| = |V| - 2$ ja $(u, v) \in E$ aina kun $u \in U$, $v \in V$ ja $u \neq v$.

   (b) **Annettu:** suuntaamaton verkko $G = (V, E)$, luonnollinen luku k
   Kysymys: onko olemassa sellainen $U \subseteq V$, että $|U| \geq k$ ja $(u, v) \notin E$ aina kun $u \in U$ ja $v \in V$.

   (c) **Annettu:** Turingin kone M
   Kysymys: hyväksyykö M ainakin toisen merkkijonoista 000 ja 111

4. [*12 pistettä*] Suuntaamaton verkko (V, E) on *täydellinen*, jos $(u, v) \in E$ kaikilla $u, v \in V$, joilla $u \neq v$. Tarkastellaan seuraavaa ”nurinkurista” versiota kauppamatkustajan ongelmasta:

   Annettu: suuntaamaton täydellinen verkko $G = (V, E)$, kustannus $c(u, v) \in \mathbf{N}$ kaikille $(u, v) \in E$, luonnollinen luku k
   Kysymys: onko verkossa G Hamiltonin kehä, jonka kaarten yhteiskustannus on *vähintään* k.

   Osoita, että ongelma on NP-täydellinen. (*Vihje:* samantapainen palautus Hamiltonin kehä -ongelmasta kuin ”oikealla” kauppamatkustajan ongelmalla.)