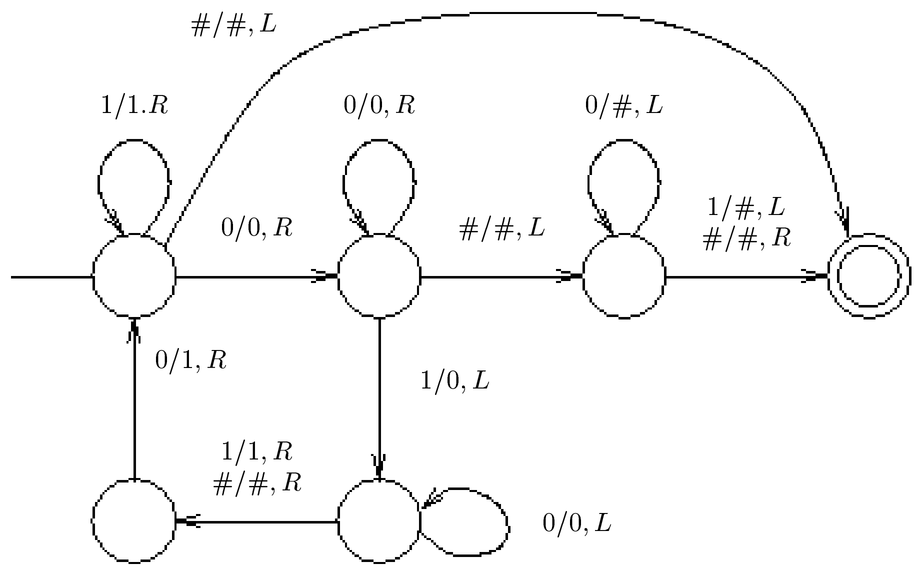
581336 Laskennan teoria (kevät 2006)
Kurssikoe, ratkaisuja (Jyrki Kivinen)

1. Alla on yksinauhainen Turingin kone. Myös useampinauhaiset koneet on hyväksytty, kunhan ne ovat muuten oikein ja selvästi esitetty.

.



.

2. (a) Jos $A \leq_{\mathrm{m}} B$ ja $B \in \mathrm{REC}$, niin $A \in \mathrm{REC}$. Siis vaihtoehto "$A \notin \mathrm{REC}$ ja $B \in \mathrm{REC}$" ei ole mahdollinen. Muut ovat mahdollisia.

   Esimerkiksi tilanne "$A \in \mathrm{REC}$ ja $B \in \mathrm{REC}$" saadaan aikaan valitsemalla mikä tahansa $A \in \mathrm{REC}$, ja $B = A$. Samoin tilanne "$A \notin \mathrm{REC}$ ja $B \notin \mathrm{REC}$" saadaan aikaan valitsemalla mikä tahansa $A \notin \mathrm{REC}$, ja $B = A$. Lopuksi jos $A \in \mathrm{REC} - \{\emptyset, \Sigma^*\}$, niin $A \leq_{\mathrm{m}} B$ kaikilla $B \notin \{\emptyset, \Sigma^*\}$. Siis tilanteesta "$A \in \mathrm{REC}$ ja $B \notin \mathrm{REC}$" saadaan esimerkki valitsemalla mikä tahansa $A \in \mathrm{REC} - \{\emptyset, \Sigma^*\}$ ja $B \notin \mathrm{REC}$.

   (b) Komplementtiongelma voidaan formalisoida kielenä

$$L_{\mathrm{c}} = \left\{ u111v \in \{0,1\}^* \mid L(M_u) = \overline{L(M_v)} \right\}$$

   ja tyhjyysongelma kielenä

$$L_{\mathrm{e}} = \{ w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) = \emptyset \}.$$

   (c) Jos osoitetaan $L_{\mathrm{e}} \leq_{\mathrm{m}} L_{\mathrm{c}}$, niin tiedosta $L_{\mathrm{e}} \notin \mathrm{REC}$ seuraa haluttu johtopäätös $L_{\mathrm{c}} \notin \mathrm{REC}$. Halutaan siis palauttaa tyhjyysongelma komplementtiongelmaan. Tällainen palautus saa argumenttinaan Turingin koneen M (tyhjyysongelman tapaus), ja palauttaa kaksi Turingin konetta M_1 ja M_2 (komplementtiongelman tapaus). Näiden on täytettävä ehto, että jos $L(M)$ on tyhjä, niin $L(M_1) = \overline{L(M_2)}$; muuten on oltava $L(M_1) \neq \overline{L(M_2)}$.

   Muodollisesti palautus $f\colon L_{\mathrm{e}} \leq_{\mathrm{m}} L_{\mathrm{c}}$ on laskettava funktio, jolla $f(w) \in L_{\mathrm{c}}$ jos ja vain jos $w \in L_{\mathrm{e}}$. Tässä mielenkiintoinen tapaus on se, että w on validi koodi jollekin Turingin koneelle, ja $f(w) = u111v$, missä samoin u ja v ovat valideja koodeja.

(d) Eräs palautus saadaan valitsemalla jokin sellainen w_{all}, jolla $M_{w_{\text{all}}}$ hyväksyy kaikki merkkijonot, ja asettamalla $f(v) = v111w_{\text{all}}$.

3. (a) Ongelmalle voidaan esittää seuraava ratkaisualgoritmi, joka selvästi toimii polynomisessa ajassa:

   for $x \in V$ **do**
       for $y \in V - \{ x \}$ **do**
           ok := true
           for $u \in V - \{ x, y \}$ **do**
               for $v \in V$ **do**
                   if $(u, v) \notin E$ **then** ok := false
           if ok **then accept**
   reject.

   Ongelma on siis polynomisessa ajassa ratkeava, ja näin ollen tietysti myös ratkeava ja osittain ratkeava.

   Huom. Tehtävään tuli lyöntivirhe, mistä anteeksipyyntö. Ehdon "$v \in V$" oli tarkoitus olla "$v \in U$". Tällöin kysymyksessä olisi ollut tutun klikkiongelman erikoistapaus, jossa klikin kooksi on rajattu $|V| - 2$. Tehtävän ratkaisuun tällä ei juuri ole vaikutusta.

   (b) Ongelmassa kysytään, onko olemassa solmujoukko U, jonka koko on ainakin k ja jonka solmuista ei lähde yhtään kaarta. Tehtävä voidaan ratkaista yksinkertaisesti laskemalla, kuinka monta "yksinäistä" solmua verkossa on (siis sellaisia $u \in V$, joilla $(u, v) \notin E$ kaikilla $v \in V$). Jos näitä on k tai enemmän, hyväksytään; muuten hylätään. Siis ongelma ratkeaa polynomisessa ajassa, ja on näin ollen myös ratkeava ja osittain ratkeava.

   Huom. Tehtävään tuli sama lyöntivirhe kuin (a)-kohdassa, mistä taas anteeksipyyntö. Ehdon "$v \in V$" oli tarkoitus olla "$v \in U$". Tällöin kysymyksessä olisi ollut luennoilta tuttu riippumaton joukko -ongelma, joka tiedetään NP-täydelliseksi. Se siis ratkeaa polynomisessa ajassa, jos ja vain jos P = NP. Joka tapauksessa se on ratkeava ja osittain ratkeava. Arvostelussa on hyväksytty myös ne ratkaisut, joissa selvästi tehtävä on vahingossa luettu siten, kuin tehtävän laatijakin oli ajatellut.

   (c) Kysymyksessä on ei-triviaali semanttinen ominaisuus, joten Ricen lausen perusteella ongelma on ratkeamaton. Näin ollen se etenkään ei ratkea polynomisessa ajassa.

   Ongelma on osittain ratkeava. Se voidaan ratkaista epädeterministisellä Turingin koneella seuraavaan tapaan:

   i. Valitse epädeterministisesti $x = 000$ tai $x = 111$.
   ii. Simuloi konetta M syötteellä x. Hyväksy, jos M hyväksyisi; hylkää, jos M hylkäisi.

4. Käytetään tehtävässä annetusta ongelmasta merkintää nTSP.

   Väite Ongelma nTSP on NP-täydellinen.

   Todistus Osoitetaan, että nTSP $\in$ NP ja HC $\leq^{\mathrm{p}}_{\mathrm{m}}$ nTSP. Väite seuraa tästä tunnettujen tulosten nojalla.

   Ongelma nTSP voidaan ratkaista seuraavalla epädeterministisesti polynomisessa ajassa toimivalla algoritmilla:

   Olkoon $n = |V|$.
   Valitse epädeterministisesti $v[i] \in V$ kun $i = 1, \ldots, n$.
   Aseta $v[0] = v[n]$.
   Jos $(v[i], v[i+1]) \notin E$ jollain $0 \leq i \leq n-1$, niin hylkää.
   Jos $\sum_{i=0}^{n-1} c(v[i], v[i+1]) < k$, niin hylkää.
   Hyväksy.

Siis nTSP $\in$ NP.

Olkoon nyt $G = (V, E)$ Hamiltonin kehä -ongelman tapaus (eli suuntaamaton verkko). Muodostetaan nTSP-ongelman tapaus $f(G) = (V', E', c, k)$ seuraavasti:

- $V' = V$,
- $E' = \{ (u, v) \mid u, v \in V', u \neq v \}$,
- $c(u, v) = 2$ jos $(u, v) \in E$; muuten $c(u, v) = 1$ ja
- $k = 2n$, missä $n = |V|$.

Jos verkossa G on Hamiltonin kehä, niin sama läpikäyntijärjestys verkossa (V', E') antaa Hamiltonin kehän, jonka kunkin kaaren kustannus on 2. Siis kyseisen reitin kokonaiskustannus on $2n$, ja $f(G) \in$ nTSP.

Kääntäen jos verkossa (V', E') on Hamiltonin kehä, niin kyseinen kehä sisältää tasan n kaarta. Koska jokaisen yksittäisen kaaren paino on korkeintaan 2, kokonaispainon $2n$ saavuttaminen edellyttää, että jokaisen kaaren paino on 2, jolloin kaaret ovat myös verkossa G. Siis jos $f(G) \in$ nTSP, niin verkossa G on Hamiltonin kehä.

Koska kuvaus $f\colon (V, E) \mapsto (V', E', c, k)$ on selvästi laskettavissa polynomisessa ajassa, se on haluttu palautus HC $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{p}}$ nTSP. $\square$