582421 Satunnaisalgoritmit (kevät 2009)
1. kurssikoe 23.2. kello 16–19 auditorio A111
vastuuhenkilö Jyrki Kivinen

Vastaa kaikkien tehtävien kaikkiin kohtiin. Kokeen maksimipistemäärä on 24 pistettä.

Tehtävissä 2 ja 3 voit käyttää hyväksi mitä tahansa kurssilla esitettyjä tuloksia, kunhan selität aina lyhyesti, mitä tulosta milloinkin käytät. Tehtävässä 1 voit käyttää mitä tahansa yleisiä tuloksia, mutta et (tietenkään) Poisson-jakaumalle todistettuja erityisominaisuuksia.

1. [*8 pistettä*]

   (a) Satunnaismuuttuja X noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla μ. Osoita, että sen momenttigeneroiva funktio on
   $$M_X(t) = \exp(\mu(\mathrm{e}^t - 1)).$$

   (b) Satunnaismuuttuja X noudattaa Poisson-jakaumaa parametrilla μ ja Y Poisson-jakaumaa parametrilla λ. Kun lisäksi X ja Y ovat riippumattomat, niin mitä voidaan edellisen perusteella päätellä satunnaismuuttujan $X + Y$ jakaumasta?

   (c) Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomia satunnaismuuttujia ja X_i Poisson-jakautunut parametrilla μ_i. Merkitään $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ja $\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Osoita, että
   $$\Pr(X \geq x) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\mu}(\mathrm{e}\mu)^x}{x^x}$$
   kaikilla $x > \mu$.

2. [*8 pistettä*] Tarkastellaan tuttua tilannetta, jossa m palloa sijoitetaan satunnaisesti n lokeroon, jotka on numeroitu $1, \ldots, n$. Merkitään $m = \lambda n$. Oletetaan, että n on parillinen, ja muodostetaan lokeroista $n/2$ paria siten, että lokerot $2i - 1$ ja $2i$ muodostavat parin kullakin $i = 1, \ldots, n/2$. Sanomme, että lokeropari on *peitetty*, jos sen kumpaankin lokeroon tulee vähintään yksi pallo.

   (a) Kuinka monta lokeroparia odotusarvoisesti tulee peitetyksi? Anna tarkka vastaus ja likiarvo, joka pätee, kun λ on vakio ja n suuri.

   (b) Valitaan parametrille λ arvo, jolla edellisessä kohdassa laskettu (suurilla n likimain pätevä) odotusarvo on $n/4$. Osoita, että todennäköisyydellä $1 - O(n^{-c})$ ainakin $n/8$ lokeroa tulee peitetyksi, missä c on vakio (jota ei ole tarpeen optimoida).

3. [*8 pistettä*]

   (a) Osoita, että n solmun täydellisen verkon kaaret on mahdollista värittää kahdella värillä siten, että verkkoon tulee korkeintaan $\frac{1}{4}\binom{n}{3}$ monokromaattista kolmiota (kolmen solmun osaverkkoa, jonka kaikki kolme kaarta ovat saman väriset).

   (b) Esitä deterministinen polynomisessa ajassa toimiva algoritmi, joka löytää edelllisen kohdan mukaisen värityksen.