

## 582421 Satunnaisalgoritmit (kevät 2009)

2. kurssikoe 29.4. kello 16–19 auditorio A111

vastuuhenkilö Jyrki Kivinen

Vastaa kaikkien tehtävien kaikkiin kohtiin. Kokeen maksimipistemäärä on 24 pistettä.

Voit pitää tunnettuina kaikkia kurssilla esitettyjä yleisiä tuloksia, mutta et yksittäisten laskujen ratkaisuja tms.

1. [8 pistettä] Tarkastellaan uhkapeliä, jossa pelaaja pelaa kasinoa vastaan. Peli koostuu riippumattomista symmetrisen kolikon heitoista. Jos tulos on klaava, kasino maksaa pelaajalle yhden euron. Jos tulos on kruuna, pelaaja maksaa kasinolle yhden euron. Peli jatkuu, kunnes joko pelaajan nettovoitto ylittää  $\ell_1$  euroa (pelaaja voittaa pelin) tai pelaajan nettotappio ylittää  $\ell_2$  euroa (pelaaja häviää pelin).
  - (a) Esitä peliä mallintava Markovin ketju. Onko ketju pelkistymätön (irreducible)? Mitkä sen tiloista ovat palautuvia (recurrent)? Entä väistyviä (transient)? Perustele ominaisuudet lyhyesti; virkkeen tai parin intuitiivinen selitys riittää.
  - (b) Laske todennäköisyys, että peli päättyy pelaajan voittoon.
2. [8 pistettä] Koneessa on kaksi komponenttia,  $A$  ja  $B$ , joissa esiintyy vikoja toisistaan riippumatta. Kun komponentti  $A$  on uusi, sen vikaantumiseen kuuluva aika oletetaan eksponenttijakautuneeksi, odotusarvona 5 tuntia. Komponentilla  $B$  vikaantumisaajan odotusarvo on 3 tuntia, ja myös eksponenttijakautunut. Kun uusi kone käynnistetään, kuinka kauan se odotusarvoisesti toimii, ennen kuin ainakin toinen komponenteista  $A$  ja  $B$  vikaantuu? Mikä on todennäköisyys, että ensimmäisenä vikaantuu komponentti  $A$ ?
3. [8 pistettä]
  - (a) Tarkastellaan suuntaamatonta verkkoa  $G = (V, E)$ , joka oletetaan täydelliseksi. Muodosta Markovin ketju, jonka tiloina ovat verkon  $G$  Hamiltonin kehät ja jonka tasapainojakauma on tasainen. Perustele, että ketjulla todella on tasapainojakauma ja että se on tasainen.
  - (b) Lisätään edellisen tehtävän verkkoon  $G$  kaarille painot. Miten muuttaisit edellisen tehtävän Markovin ketjua, että tasapainojakaumassa kehän  $p$  todennäköisyys olisi verrannollinen suureeseen  $e^{-c(p)}$ , missä  $c(p)$  on kehän kustannus (eli siihen kuuluvien kaarten painojen summa)?

Markovin ketjuja ei tarvitse yrittää optimoida minkään kuvitellun algoritmisen sovelluksen kannalta. Riittää, että ketjuilla on tehtävässä pyydyt ominaisuudet.