

582421 Satunnaisalgoritmit (syksy 2005)

1. välikoe 17.10. kello 9-12 sali B123

Kaikissa tehtävissä voit tarpeen mukaan olettaa, että n on parillinen tms. ja jättää mahdollisten pyöristysten vaikutuksen ottamatta huomioon.

Maksimipisteet $8 + 8 + 8 = 24$.

1. Olkoot X_1, \dots, X_n riippumattomien rahanheittojen tuloksia. Jos $X_i = X_{i+1} = \dots = X_{i+k-1}$, missä $k \geq 2$, sanomme että heitosta i alkaa k heiton sarja. (Tällöin jos $k > 2$, heitosta i alkaa myös j heiton sarja kaikilla $2 \leq j < k$.)

(a) Osoita, että $\log_2 n + 1$ heiton sarjojen lukumäärän odotusarvo on $1 - o(1)$.

(b) Osoita, että ainakin yksi ainakin $\log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n$ heiton sarja sattuu ainakin todennäköisyydellä $1 - 1/n$, kun n on riittävän suuri.

2. Olkoot X_1, \dots, X_n riippumattomia Poisson-toistokokeita, $X = \sum_{i=1}^n X_i$ ja $\mu = \mathbf{E}[X]$.

(a) Johda satunnaismuuttujan X momenttigeneroivalle funktiolle M_X yläraja

$$M_X(t) \leq \exp((e^t - 1)\mu).$$

(b) Osoita, että

$$\Pr(X \leq (1 - \delta)\mu) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{1-\delta}} \right)^\mu$$

kaikilla $0 < \delta < 1$.

3. Tarkastellaan tuttua tilannetta, jossa n palloa sijoitetaan n lokeroon toisistaan riippumatta siten, että kunkin pallon todennäköisyys tulla kuhunkin lokeroon on sama.

Ajatellaan nyt, että kuhunkin lokeroon mahtuu vain kaksi palloa. Jos johonkin lokeroon tulisi kolme palloa tai enemmän, sanomme, että tässä lokerossa tapahtuu *ylivuoto*. Olkoon Z niiden lokeroiden lukumäärä, joissa tapahtuu ylivuoto.

(a) Mikä on $\mathbf{E}[Z]$? Anna tarkka arvo ja approksimaatio, joka pätee olettaen $(1 - 1/n)^n \approx e^{-1}$. (Approksimaation tarkkuutta ei tarvitse analysoida.)

(b) Johda yläraja tapahtuman $Z < \frac{1}{2}\mathbf{E}[Z]$ todennäköisyydelle. Rajassa olevia numeerisia vakioita ei tarvitse optimoida, mutta rajan pitäisi olla suuruusluokkaa $O(e^{-cn})$ jollakin $c > 0$.

(The same in English on the reverse side.)