582421 Satunnaisalgoritmit (syksy 2005)

2. välikoe 12.12., ratkaisuja (tehtävät 1 ja 2 KL, tehtävä 3 JK)

1. Verkossa on $N = \binom{n}{3}$ mahdollista kolmiota, ja todennäköisyys sille, että jokin kolmen solmun joukko on kolmio on p^3. Olkoon $X_i = [\text{solmujoukko } i \text{ on kolmio}]$, jolloin $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ on verkon sisältämien kolmioiden lukumäärä. Muuttujat X_i eivät ole riippumattomia, koska solmujoukoilla voi olla yhteisiä solmuja. Odotusarvon lineaarisuuden perusteella on kuitenkin $\mathbf{E}[X] = \binom{n}{3}p^3$.

   (a) Jos $p = o(1/n)$, on $\lim_{n\to\infty} np = 0$. Käytetään seuraavaa tulosta:

   $$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=0}^{N} i \Pr(X = i) = \sum_{i=1}^{N} i \Pr(X = i) \geq \sum_{i=1}^{N} \Pr(X = i) = \Pr(X \geq 1).$$

   Tästä saadaan $\Pr(X > 0) \leq \mathbf{E}[X] = \Theta(n^3p^3) \to 0$, kun $n \to \infty$. Siten $\lim_{n\to\infty} C(n) = 0$.

   (b) Kun $p = \omega(1/n)$, on $\lim_{n\to\infty} 1/np = 0$. Tällöin $\mathbf{E}[X] \to \infty$, joten edellisen kohdan raja ei kerro mitään. Nyt voidaan käyttää toisen momentin menetelmää, jonka mukaan

   $$\Pr(X = 0) \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{\mathbf{E}[X]^2}.$$

   Varianssi on muotoa

   $$\mathbf{Var}[X] = \sum_{i,j} \mathbf{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i,j} \mathbf{E}[X_iX_j] - \mathbf{E}[X_i]\mathbf{E}[X_j].$$

   Kun $i = j$, on $\mathbf{E}[X_iX_j] = \mathbf{E}[X_i] = p^3$, joten $\mathbf{Cov}(X_i, X_i) = p^3 - p^6$. Oletetaan sitten, että $i \neq j$. Kovarianssi riippuu nyt siitä, kuinka monta yhteistä solmua on solmukolmikoilla i ja j. Jos yhteisiä solmuja ei ole, tai jos niitä on yksi, on $\mathbf{E}[X_iX_j] = \mathbf{E}[X_i]\mathbf{E}[X_j]$, ja kovarianssi häviää. Mutta jos yhteisiä solmuja on kaksi, on

   $$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_iX_j] &= \Pr(X_iX_j = 1)\\ &= \Pr(X_iX_j = 1 \mid X_j = 1)\Pr(X_j = 1) + \Pr(X_iX_j = 1 \mid X_j = 0)\Pr(X_j = 0)\\ &= p^2 \cdot p^3 + 0 \cdot p^3 = p^5.\end{aligned}$$

   Tällaisia solmujoukkoja on $\binom{n}{4}\binom{4}{2}$ kappaletta. Yhteensä siis

   $$\mathbf{Var}[X] = \binom{n}{3}(p^3 - p^6) + \binom{n}{4}\binom{4}{2}(p^5 - p^6)$$

   ja todennäköisyydelle $\Pr(X = 0)$ saadaan yläraja

   $$\frac{1}{\binom{n}{3}p^3}(1 - p^3) + \frac{\binom{n}{4}\binom{4}{2}}{\binom{n}{3}^2 p}(1 - p) = \Theta\Big(\frac{1}{(np)^3}\Big) + \Theta\Big(\frac{1}{n^3}\Big) + \Theta\Big(\frac{1}{pn^2}\Big) + \Theta\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

   jonka jokainen termi lähestyy nollaa suurilla n:n arvoilla. Siis $\lim_{n\to\infty} \Pr(X = 0) = 0$ eli $\lim_{n\to\infty} C(n) = 1$.

2. *Ratkaisu 1.* Ajatellaan palvelimien vastauksia Poisson-prosesseina. Prosessin A parametri on siis α ja prosessin B parametri β. Ensimmäinen tapahtuma yhdistetystä prosessista (jonka parametri on $\alpha + \beta$) tulee odotusarvoisesti ajassa $1/(\alpha + \beta)$. Tämä tapahtuma on prosessista A todennäköisyydellä $\alpha/(\alpha+\beta)$ ja prosessista B todennäköisyydellä $\beta/(\alpha+\beta)$. Toista tapahtumaa voidaan odottaa prosessista B (jos ensimmäinen tuli prosessista A) tai A (päinvastoin). Eksponenttijakauman muistamattomuusominaisuuden perusteella näihin tapahtumiin kuluu aikaa $1/\beta$ ja $1/\alpha$.

Yhteensä kuluvan ajan odotusarvo on siis

$$\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

Olisi myös voitu odottaa tapahtumia yhdistetystä prosessista. Ensimmäisen tapahtuman jälkeen alkaa toistokoe, joka päättyy, kun toisen tyypin tapahtuma nähdään ensimäisen kerran. Tapahtumien lukumäärä on jakautunut geometrisesti.

Ratkaisu 2. Tiedetään, että $X_A \sim \mathrm{Exp}(\alpha)$ ja $X_B \sim \mathrm{Exp}(\beta)$. Olkoon $X = \max(X_A, X_B)$. Koska muuttujat X_A ja X_B ovat riippumattomia, on

$$\begin{aligned}\Pr(X \le t) &= \Pr(X_A \le t)\Pr(X_B \le t)\\ &= (1-e^{-\alpha t})(1-e^{-\beta t})\\ &= 1-e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}+e^{-(\alpha+\beta)t}.\end{aligned}$$

Tiheysfunktio saadaan tästä derivoimalla:

$$f_X(t) = \alpha e^{-\alpha t}+\beta e^{-\beta t}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)t}.$$

Odotusarvoa varten on laskettava integraali $\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty t f_X(t)\,dt$. Nyt osittaisintegroimalla nähdään, että $\int_0^\infty axe^{-ax}\,dx = 1/a$, joten

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha+\beta}.$$

3. Haluttu Markovin ketju saadaan helposti samalla idealla kuin kurssikirjan sivulla 265 esitetty ketju riippumattomille joukoille.

   Itse asiassa I on solmupeite, jos ja vain jos $V-I$ on riippumaton. Tämä nimittäin tarkoittaa, että jokaisella kaarella $(u,v)\in E$ ainakin toinen solmuista u tai v kuuluu joukkoon I, eli yhtäpitävästi millekään kaarelle $(u,v)\in E$ ei päde sekä $u\in V-I$ että $v \in V-I$. Tehtävälle saadaan siis ratkaisu yksinkertaisesti vaihtamalla solmujoukot komplementeikseen.