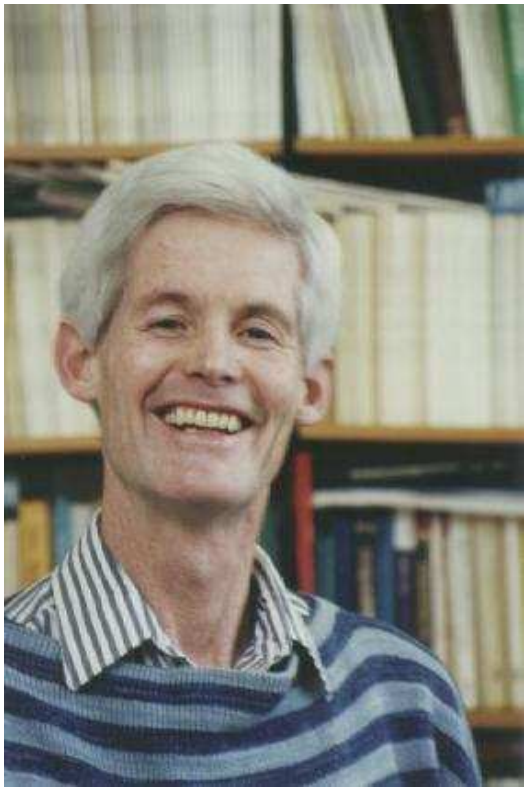
P versus NP I

- Kieliluokat P ja NP näyttävät täysin erilaisilta:
  a) P on kieliluokka, jossa alkion kuuluminen kieleen voidaan ratkaista polynomisessa ajassa deterministisellä Turingin koneella.
  b) NP on kieliluokka, jossa alkion kuuluminen kieleen voidaan verifioida polynomisessa ajassa; eli alkion kuuluminen kieleen voidaan ratkaista polynomisessa ajassa epädeterministisellä Turingin koneella.
- Selvästi $P \subset NP$.
- Sen sijaan ei tiedetä, päteekö $P \neq NP$.
- Yleisesti uskotaan, että näin todella on.
- Clay-instituutti on tarjonnut miljoona dollaria sille, joka ratkaisee P vs. NP kysymyksen.
- Probleema on ollut avoin 1970-luvun alusta lähtien.

P versus *NP* II

- Samoihin aikoihin kysymyksessä saavutettiin edistystä, kun Stephen Cook ja Leonid Levin esittelivät NP-täydellisyyden käsitteen.



Polynominen palautus I

- NP-täydellisyyden määritteleminen perustuu polynomisen palautuvuuden käsitteeseen.
- Se tarkoittaa havainnollisesti, että probleema voidaan kääntää eli palauttaa toiseksi probleemaksi, jonka ratkaisusta saadaan sitten alkuperäisen ratkaisu.
- Joskus käännös on suoraviivainen, joskus hyvinkin mutkikas.

Määritelmä

Funktio $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$ *on polynomisesti laskettavissa, jos on olemassa polynomisessa ajassa toimiva Turingin kone, joka kirjoittaa pysähtyessään nauhalle arvon* $f(w)$*, kun alussa nauhalla on* $w \in \Sigma^*$*.*

Polynominen palautus II

Määritelmä

Kieli A on polynomisesti palautettavissa kieleen B, $A \leq_P B$, jos on olemassa polynomisesti laskettavissa oleva funktio $f : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$, jolle kaikilla $w \in \Sigma^*$ pätee ehto

$$w \in A \iff f(w) \in B.$$

Funktiota f kutsutaan polynomiseksi palautukseksi A:sta B:hen.

Lause

Jos $A \leq_P B$ ja $B \in P$, niin $A \in P$.

Todistus. Olkoon M polynomisessa ajassa toimiva Turingin kone, joka ratkaisee B:n, ja olkoon f polynominen palautus A:sta B : *hen*. Nyt seuraava polynominen algoritmi (Turingin kone) ratkaisee A:n, kun syötteenä on w:

Polynominen palautus III

1. Laske $f(w)$.
2. Aja M syötteellä $f(w)$ ja tulosta se, mitä M lopuksi tulostaa.

Kaikki toimii polynomisessa ajassa (koska polynomien yhdiste on polynomi) ja $w \in A$ aina kun $f(w) \in B$. $\square$

Esimerkki: Nimien järjestelyn palautus lukujen järjestelyyn I

- Ensin hyvin yksinkertainen palautus.
- Oletetaan, että käytössä on kokonaislukuja järjestelevä algoritmi.
- Näytetään, miten nimien eli merkkijonojen järjestely voidaan palauttaa lukujen järjestelemiseen, jos emme aseta mitään rajoja lukujen suuruudelle.
- Merkkijono voidaan kuvata injektiivisesti luvulle siten, että tulkitaan jokainen kirjain bittijonoksi, kuten tietokoneessa tehdään ja laitetaan bittijonot peräjälkeen. Tämä pitempi bittijono tulkitaan luvuksi.
- Selvästi muunnos voidaan tehdä polynomisessa ajassa merkkijonon pituuden suhteen.

Esimerkki: 3SAT:n palautus CLIQUE-ongelmaan I

Seuraavaksi hieman vaikeampi tapaus. Tarvitsemme ensin käsitteitä:

- Literaali on Boolen muuttuja tai sellaisen negaatio, x tai $\overline{x}$.
- Disjunktiivinen lause (engl. clause) koostuu useista literaaleista, jotka on yhdistetty tai-konnektiivilla: $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4)$.
- Boolen lause on konjunktiivisessa normaalimuodossa eli cnf-muodossa, jos se koostuu useasta disjunktiivisesta lauseesta, jotka on yhdistetty konjunktioilla:

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_6) \wedge (x_3 \vee \overline{x_6}).$$

- Cfn-muoto on 3cfn-muoto, jos kaikissa disjunktiivisissa lauseissa on täsmälleen kolme literaalia:

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_3 \vee \overline{x_5} \vee x_6) \wedge (x_3 \vee \overline{x_6} \vee x_4) \wedge (x_4 \vee x_5 \vee x_6).$$

Esimerkki: 3SAT:n palautus CLIQUE-ongelmaan II

- 3SAT on sellaisten 3cfn-muodossa olevien lauseiden joukko, jotka sopivilla muuttujien totuusarvosijoituksilla tulevat todeksi. Siten kaavassa täytyy olla vähintään yksi literaali, jonka totuusarvo on tosi.

Lause

3SAT voidaan palauttaa polynomisesti CLIQUE-ongelmaan.

Todistus. Olkoon ϕ 3SAT:in kaava, jossa on k disjunktiivista lausetta:

$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \cdots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k).$$

Palautuksessa f kaavasta ϕ generoidaan pari (G, k), missä G on suuntaamaton verkko. Pari saadaan seuraavasti.

- Verkon solmuiksi otetaan jokaisen disjunktiivisen lauseen literaalit. Samaa literaalia saattaa siis vastata useampi solmu, jos literaali esiintyy useassa lauseessa.

- Verkon solmuiksi otetaan jokaisen disjunktiivisen lauseen literaalit. Samaa literaalia saattaa siis vastata useampi solmu, jos literaali esiintyy useassa lauseessa.
- Ryhmitellään solmut siten, että lauseen kolme literaalia tulevat aina samaan, kolmen solmun ryhmään.

- Verkon solmuiksi otetaan jokaisen disjunktiivisen lauseen literaalit. Samaa literaalia saattaa siis vastata useampi solmu, jos literaali esiintyy useassa lauseessa.
- Ryhmitellään solmut siten, että lauseen kolme literaalia tulevat aina samaan, kolmen solmun ryhmään.
- Solmun nimi on sama kuin se literaali, jota se edustaa. Siten eri solmuilla voi olla sama nimi.

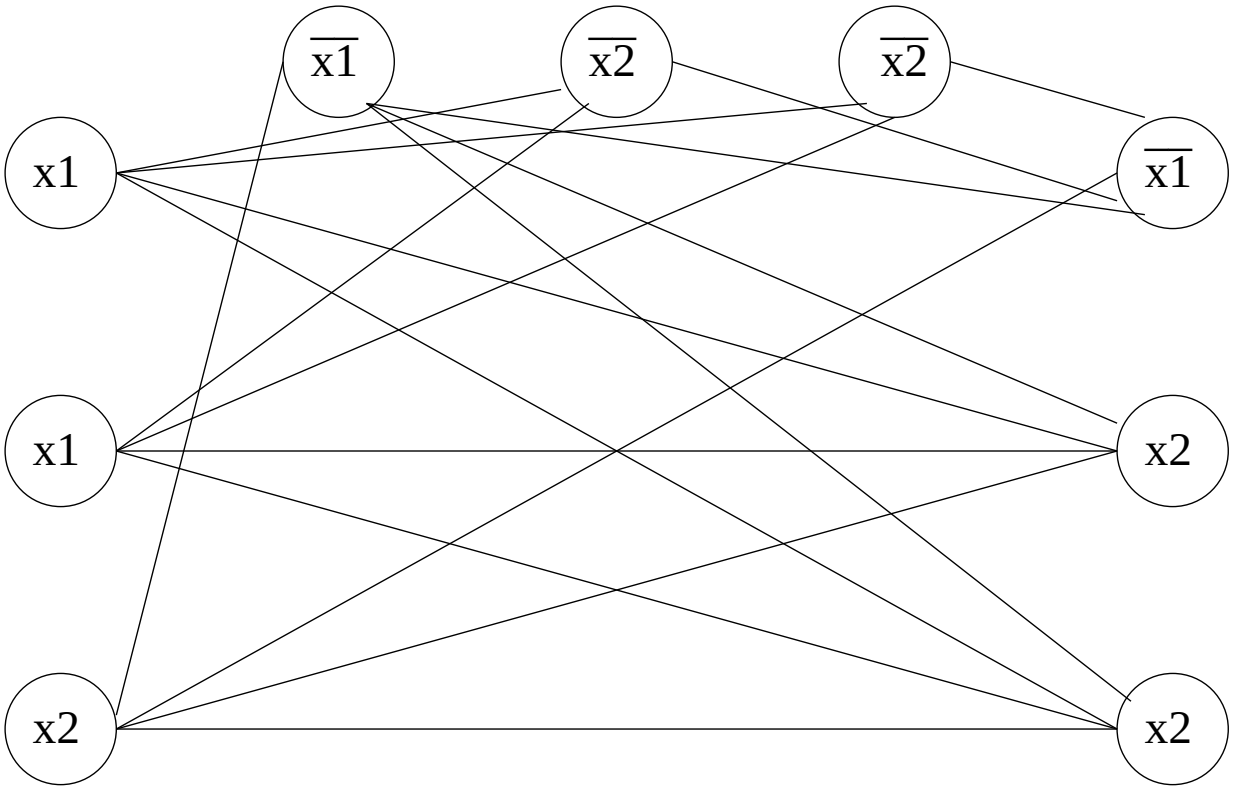
- Verkon solmuiksi otetaan jokaisen disjunktiivisen lauseen literaalit. Samaa literaalia saattaa siis vastata useampi solmu, jos literaali esiintyy useassa lauseessa.
- Ryhmitellään solmut siten, että lauseen kolme literaalia tulevat aina samaan, kolmen solmun ryhmään.
- Solmun nimi on sama kuin se literaali, jota se edustaa. Siten eri solmuilla voi olla sama nimi.
- Vedetään särmiä solmujen välille seuraavasti:

  i) Lausetta edustavien kolmen solmun välillä ei ole särmiä.
  ii) Särmää ei vedetä myöskään kahden vastakkaisen solmun välille, kuten ei solmujen x_2 ja $\overline{x_2}$ välille.
  iii) Muiden solmujen välille vedetään särmä.

Seuraava kuva näyttää, miten konstruktio tapahtuu kaavan

$$\phi = (x_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_2)$$

tapauksessa.



Seuraavaksi täytyy osoittaa, että muunnoksella on palautuksen ominaisuudet. Eli jos kaava on toteutuva, niin verkossa on k-klikki.

- Oletetaan, että kaava ϕ on toteutuva. Tällöin jokaisessa disjunktiivisessa lauseessa on ainakin yksi literaali, joka on tosi.

- Oletetaan, että kaava ϕ on toteutuva. Tällöin jokaisessa disjunktiivisessa lauseessa on ainakin yksi literaali, joka on tosi.
- Valitaan jokaisesta disjunktiivista lausetta edustavasta solmukolmikosta yksi solmu, joka vastaa totta literaalia. Jos kolmikossa on useampi kuin yksi tällainen solmu, valitaan jokin niistä.

- Oletetaan, että kaava ϕ on toteutuva. Tällöin jokaisessa disjunktiivisessa lauseessa on ainakin yksi literaali, joka on tosi.
- Valitaan jokaisesta disjunktiivista lausetta edustavasta solmukolmikosta yksi solmu, joka vastaa totta literaalia. Jos kolmikossa on useampi kuin yksi tällainen solmu, valitaan jokin niistä.
- Nyt näin valitut solmut muodostavat k-klikin.

- Oletetaan, että kaava ϕ on toteutuva. Tällöin jokaisessa disjunktiivisessa lauseessa on ainakin yksi literaali, joka on tosi.
- Valitaan jokaisesta disjunktiivista lausetta edustavasta solmukolmikosta yksi solmu, joka vastaa totta literaalia. Jos kolmikossa on useampi kuin yksi tällainen solmu, valitaan jokin niistä.
- Nyt näin valitut solmut muodostavat k-klikin.
- Ensinnäkin solmuja valittiin k kpl.

- Oletetaan, että kaava ϕ on toteutuva. Tällöin jokaisessa disjunktiivisessa lauseessa on ainakin yksi literaali, joka on tosi.
- Valitaan jokaisesta disjunktiivista lausetta edustavasta solmukolmikosta yksi solmu, joka vastaa totta literaalia. Jos kolmikossa on useampi kuin yksi tällainen solmu, valitaan jokin niistä.
- Nyt näin valitut solmut muodostavat k-klikin.
- Ensinnäkin solmuja valittiin k kpl.
- Valituista solmuista jokaisen kahden välillä on särmä, koska kumpikaan särmän poissulkevista ehdoista ei ole voimassa.

- Oletetaan, että kaava ϕ on toteutuva. Tällöin jokaisessa disjunktiivisessa lauseessa on ainakin yksi literaali, joka on tosi.
- Valitaan jokaisesta disjunktiivista lausetta edustavasta solmukolmikosta yksi solmu, joka vastaa totta literaalia. Jos kolmikossa on useampi kuin yksi tällainen solmu, valitaan jokin niistä.
- Nyt näin valitut solmut muodostavat k-klikin.
- Ensinnäkin solmuja valittiin k kpl.
- Valituista solmuista jokaisen kahden välillä on särmä, koska kumpikaan särmän poissulkevista ehdoista ei ole voimassa.
- Siten verkossa on tosiaan klikki. Jää osoitettavaksi, että mikäli verkossa on k-klikki, vastaava kaava on toteutuva.

- Mitkään kaksi klikin solmua eivät sijaitse samassa kolmikossa, koska kolmikon solmuja ei ole yhdistetty toisiinsa särmillä. Siten jokaisessa k kolmikossa on yksi klikin solmu.

- Mitkään kaksi klikin solmua eivät sijaitse samassa kolmikossa, koska kolmikon solmuja ei ole yhdistetty toisiinsa särmillä. Siten jokaisessa k kolmikossa on yksi klikin solmu.
- Valitaan totuusarvoasetus siten, että klikin solmuja vastaavat literaalit tulevat todeksi.

- Mitkään kaksi klikin solmua eivät sijaitse samassa kolmikossa, koska kolmikon solmuja ei ole yhdistetty toisiinsa särmillä. Siten jokaisessa k kolmikossa on yksi klikin solmu.
- Valitaan totuusarvoasetus siten, että klikin solmuja vastaavat literaalit tulevat todeksi.
- Tämä on mahdollista, koska kahta vastakkaista literaalia ei yhdistetä särmällä, eikä sellaiset solmut voi siten esiintyä yhtäaikaa klikissa.

- Mitkään kaksi klikin solmua eivät sijaitse samassa kolmikossa, koska kolmikon solmuja ei ole yhdistetty toisiinsa särmillä. Siten jokaisessa k kolmikossa on yksi klikin solmu.
- Valitaan totuusarvoasetus siten, että klikin solmuja vastaavat literaalit tulevat todeksi.
- Tämä on mahdollista, koska kahta vastakkaista literaalia ei yhdistetä särmällä, eikä sellaiset solmut voi siten esiintyä yhtäaikaa klikissa.
- Tämä totuusarvoasetus tekee kaavasta ϕ toden, sillä jokainen disjunktiivinen lause tulee todeksi. $\square$

NP-täydellisyys I

Määritelmä

Kieli B on NP-täydellinen, jos se täyttää seuraavat kaksi ehtoa:

1. $B \in \mathrm{NP}$ *ja*
2. *jokainen NP:n kieli A on polynomisesti palautettavissa B:hen.*

Lause

Jos B on NP-täydellinen ja $B \in P$, niin $P = NP$.

Todistus. Tämä seuraa suoraan polynomisen palautuksen määritelmästä. □

Lause

Jos B on NP-täydellinen ja $B \leq_P C$, $C \in NP$, niin C on myös NP-täydellinen.

Todistus.

NP-täydellisyys II

- Tiedetään, että C on NP:ssä, joten riittää näyttää, että mielivaltainen NP:n kieli A on polynomisesti palautettavissa C:hen.
- Koska B on NP-täydellinen, voidaan A palauttaa polynomisesti B:hen.
- Toisaalta B voidaan palauttaa polynomisesti C:hen oletuksen nojalla.
- Nyt polynomisten palautusten yhdiste on edelleen polynominen palautus. Siten A on polynomisesti palautettavissa C:hen ja C on täten NP-täydellinen. $\square$

Cookin ja Levinin lause

Määritelmä

SAT on toteutuvien Boolen lauseiden joukko.

Lause

SAT on NP-täydellinen.

Todistus. Näytetään ensin, että SAT kuuluu NP:hen. Tämä on helppo osuus todistuksessa.

- Tehdään epädeterministinen kone, joka arvaa muuttujien totuusarvon.
- Tämän jälkeen on helppo testata polynomisessa ajassa, onko annettu kaava toteutuva noilla asetuksilla.

Seuraavaksi osoitetaan, että jokainen probleema NP:ssä voidaan palauttaa SAT:iin.

- Ainoa tapa tehdä tämä on näyttää, miten mielivaltainen epädeterministinen Turingin kone voidaan esittää kohtuullisen kokoisena Boolen lausekkeena.
- Tarkemmin: Jokaista Turingin koneen syötettä x kohti konstruoidaan Boolen kaava F_x, joka on toteutuva jos ja vain jos kone hyväksyy x:n.
- Tehdään ensin yleinen ratkaisu ja näytetään tämän jälkeen, minkälainen kaava syntyy eräässä suppeassa konkreettisessa tilanteessa. Päinvastainen järjestys ei oikein kannata, sillä erikoistapauksessakin joudutaan määrittelemään lähes kaikki, mitä yleisessäkin.

- Olkoon siis

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{yes}}, q_{\text{no}})$$

epädeterministinen Turingin kone, ja $p(n) \geq n$ polynomi, jolla

$$\text{time}_M \leq p(n)$$

kaikilla n.

- Voidaan olettaa, että kone on yksinauhainen.
- Oletetaan lisäksi, että

$$Q = \{q_0, q_1, ..., q_r\},$$

missä $q_{r-1} = q_{\text{yes}}$ ja $q_r = q_{\text{no}}$, ja että

$$\Gamma \cup \{>, <\} = \{s_0, s_1, ..., s_{m+1}\},$$

missä $s_0 =>$ ja $s_{m+1} =<$.

- Koska M toimii ajassa $p(n)$, mikään syötteellä mahdollinen laskenta ei voi edetä nauhalla pidemmälle kuin merkkipaikkaan $p(|x|) + 1$.

- Syötettä x, $|x| = n$, vastaavassa kaavassa F_x käytetään seuraavia muuttujaperheitä:
  1. $q[t,k]$, $0 \leq t \leq p(n)$, $0 \leq k \leq r$,
     eli hetkellä t (so. t:n laskenta-askeleen jälkeen) M on tilassa q_k.
  2. $h[t,i]$, $0 \leq t \leq p(n)$, $0 \leq i \leq p(n)+1$
     eli hetkellä t M:n nauhapää on merkkipaikan i kohdalla.
  3. $s[t,i,j]$, $0 \leq t \leq p(n)$, $0 \leq i \leq p(n)+1$, $0 \leq j \leq m+1$
     eli hetkellä t M:n nauhan merkkipaikassa i on merkki s_j.
- Muuttujat on tässä selvyyden vuoksi ryhmitelty ikäänkuin taulukoiksi, mutta ne voitaisiin tietenkin haluttaessa uudelleen nimetä miten tahansa.

- Kukin koneen M mahdollinen laskenta syötteellä x määrää näille muuttujille totuusarvot ilmeisellä tavalla. Jos laskenta pysähtyy enen hetkeä $t = p(n)$, ajatellaan koneen tilanteen pysyvän samana hetkeen $p(n)$ saakka. Toisaalta läheskään kaikki muuttujien totuusarvot eivät vastaa mahdollisia laskentoja.
- Tarkoituksena on muodostaa näistä muuttujista kaava F_x niin, että annettu totuusarvoasetus toteuttaa F_x:n jos ja vain jos se vastaa jotakin M:n hyväksyvää laskentaa syötteellä x.
- Kun vielä todetään, että kaava F_x voidaan muodostaa merkkijonosta x ja koneen M kuvauksesta deterministisesti polynomisessa ajassa, nähdään että kuvaus $f_M : x \mapsto F_x$ on haluttu palautus $f : L(M) \leq_m^p \mathrm{SAT}$.

- Kaava F_x on muodoltaan kuuden alikaavan tai "osaehdon"konjunktio:

$$F_x = G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \wedge G_4 \wedge G_5 \wedge G_6,$$

tai indeksoitua lyhennysmerkintää käyttäen

$$F_x = \bigwedge_{i=1}^{6} G_i.$$

- Alikaavojen kuvaamat ehdot ovat:

Kaava	*Merkitys*
G_1:	Kullakin hetkellä t koneen tila on yksikäsitteisesti määrätty.
G_2:	Kullakin hetkellä t koneen nauhapään osoittama paikka on yksikäsitteisesti määrätty
G_3:	Kullakin hetkellä t kussakin nauhan merkki-paikassa on yksikäsitteisesti määrätty merkki.
G_4:	Hetkellä 0 koneen tilanne on alkutilanne syötteellä x.
G_5:	Hetkellä $p(n)$ kone on hyväksyvässä lopputilassa.
G_6:	Kullakin hetkellä t, $0 \leq t \leq p(n) - 1$, koneen tilanteen muutos hetkestä t hetkeen $t + 1$ on siirtymäfunktion δ mukainen.

Viisi ensimmäistä ehtoa voidaan toteuttaa seuraavilla kaavoilla:

$$G_1 = \bigwedge_{0 \leq t \leq p(n)} \bigvee_{0 \leq k \leq r} q[t,k] \wedge \bigwedge_{\substack{0 \leq t \leq p(n) \\ 0 \leq k' \leq r}} \neg(q[t,k] \wedge q[t,k']);$$

$$G_2 = \bigwedge_{0 \le t \le p(n)} \bigvee_{1 \le i \le p(n)+1} h[t,i] \wedge \bigwedge_{\substack{0 \le t \le p(n) \\ 0 \le i < i' \le p(n)+1}} \neg(h[t,i] \wedge h[t,i']);$$

$$G_3 = \bigwedge_{\substack{0 \le t \le p(n) \\ 0 \le i \le p(n)+1}} \bigvee_{0 \le j \le m+1} s[t,i,j] \wedge \bigwedge_{\substack{0 \le t \le p(n) \\ 0 \le i \le p(n)+1 \\ 0 \le j < j' \le m+1}} \neg(s[t,i,j] \wedge s[t,i,j']);$$

$$
\begin{aligned}
G_4 \quad &= \quad q[0,0] \wedge h[0,1] \wedge s[0,0,0] \wedge \bigwedge_{1 \le i \le n} s[0,i,j_i] \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{n+1 \le i \le p(n)+1} s[0,i,m+1], \\
&\qquad \text{kun} \;\; x = s_{j_1} s_{j_2} \ldots s_{j_n}; \\
G_5 \quad &= \quad q[p(n), r-1].
\end{aligned}
$$

Alikaava G_6 kuvaa koneen tilaa, nauhapään sijainnin ja kunkin nauhamerkin muuttumista yhdessä laskenta-askeleessa. Se koostuu kolmesta osasta:

$$G_6 = G_6' \wedge G_6'' \wedge G_6'''.$$

Kaava G_6' toteaa vain sen, että jos hetkellä t koneen nauhapää ei ole merkkipaikan i kohdalla, niin paikassa i oleva merkki pysyy samana hetkellä $t+1$:

$$G_6' = \bigwedge_{\substack{0 \leq t \leq p(n)-1 \\ 0 \leq i \leq p(n)+1 \\ 0 \leq j \leq m+1}} ((s[t,i,j] \wedge \neg h[t,j]) \longrightarrow s[t+1,i,j]).$$

Kaava G_6'' toteaa sen, että jos kone hetkellä t on lopputilassa 'yes' tai 'no', niin sen tilanne hetkellä $t+1$ on sama kuin hetkellä t:

$$G_6'' = \bigwedge_{\substack{0\leq t\leq p(n)-1 \\ k=r-1,r \\ 0\leq i\leq p(n)+1 \\ 0\leq j\leq m+1}} [(q[t,k] \wedge h[t,i] \wedge s[t,i,j]) \longrightarrow (q[t+1,k] \wedge h[t+1,i] \wedge s[t+1,i,j])]$$

Kaava G_6''' lopulta formalisoi sen keskeisen vaatimuksen, että ellei kone ole ajanhetkeen t mennessä pysähtynyt, niin hetkestä t hetkeen $t+1$ sen tila, nauhapään sijainti ja nauhapään kohdalla oleva merkki muuttuvat siirtymäfunktion δ mukaisella tavalla:

$$G_6''' = \bigwedge_{\substack{0 \leq t \leq p(n)-1 \\ 0 \leq k \leq r-2 \\ 0 \leq i \leq p(n)+1 \\ 0 \leq j \leq m+1}} [A_6''' \longrightarrow B_6'''],$$

missä

$$
\begin{aligned}
A_6''' &= q[t,k] \wedge h[t,i] \wedge s[t,i,j] \\
B_6''' &= \bigvee_{(q_{k'},s_{j'},\triangle)\in\delta(q_k,s_j)} (q[t+1,k'] \wedge h[t+1,i+\triangle] \wedge s[t+1,i,j'])
\end{aligned}
$$

Nauhapään siirtosuunta on tässä ajateltu koodatuksi siten, että suuntaa L vastaa arvo $\triangle = -1$ ja suuntaa R arvo $\triangle = 1$.

Suoraviivainen tarkastus osoittaa, että merkkijonosta x, $|x| = n$, näin muodostettu kaava F_x on

- polynomista kokoa n:n suhteen, itse asiassa $\mathcal{O}(p(n)^3)$,
- se voidaan muodostaa deterministisesti polynomisessa ajassa,
- ja se on toteutuva jos ja vain jos $x \in L(M)$.

Siten kuvaus $f : x \mapsto F_x$ on palautus kielestä $A = L(M)$ kieleen SAT. $\square$

- Hieman myöhemmin James Karp esitteli toistakymmentä NP-täydellistä probleemaa.

- Jos yhdellä NP-täydellisellä probleemalla on polynominen ratkaisu, niin kaikilla muillakin on!
- Uusien NP-täydellisten ongelmien löytäminen ei edellytä yhtä mutkikasta todistamista kuin SAT-ongelman yhteydessä.

- Nimittäin jatkossa riittää antaa vain polynominen palautus SAT:iin tai johonkin muuhun, jo NP-täydelliseksi tiedettyyn ongelmaan.
- Tässä yhteydessä erityisen käyttökelpoinen on aikaisemmin esitelty 3SAT-ongelma, joka osoitetaan NP-täydelliseksi CSAT-ongelman avulla.

CSAT

Määritelmä

Lausekalkyylin kaava F on konjunktiivisessa normaalimuodossa, cfn, jos se on muotoa

$$F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m,$$

missä kukin tekijä (clause) C_i on disjunktio

$$C_i = \alpha_{i1} \vee \alpha_{i2} \vee \ldots \vee \alpha_{ir_i}.$$

Termit a_{ij} ovat literaaleja, so. muuttujia tai niiden negaatioita.

$$\begin{aligned} \mathrm{CSAT} \quad = \quad & \{F \mid F \ \text{on cnf} - \text{muotoinen toteutuva} \\ & \text{lausekalkyylin kaava}\}. \end{aligned}$$

Lause

Kieli CSAT on NP-täydellinen.

Todistus.

- CSAT kuuluu NP:hen, koska se on SAT:in erikoistapaus.
- Osoitetaan siten vain, että $A \in \mathrm{NP} \Longrightarrow A \leq_m^p \mathrm{CSAT}$.
- Tutkimalla Cookin ja Levinin lauseen todistusta nähdään, että siinä muodostettavat kaavat

$$F_x = G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \wedge G_4 \wedge G_5 \wedge (G_6' \wedge G_6'' \wedge G_6''')$$

ovat melkein cnf-muotoisia, kun

  - lyhennysmerkinnät $\phi \longrightarrow \psi$ kirjoitetaan auki muotoon $\neg\phi \vee \psi$, ja
  - tarvittaessa sovelletaan de Morganin sääntöä $\neg(\phi \wedge \psi) \equiv (\neg\phi \vee \neg\psi)$.

- Ainoan poikkeuksen muodostavat alikaavat G_6'' ja G_6'''.
- G_6''':

$$G_6''' = \bigwedge_t \left[(q_{t0} \wedge h_{t0} \wedge s_{t0}) \longrightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq k} (q_{ti} \wedge h_{ti} \wedge s_{ti}) \right] \quad \text{eli}$$

$$G_6''' = \bigwedge_t \left[\neg q_{t0} \wedge \neg h_{t0} \wedge \neg s_{t0} \wedge \bigvee_{1 \leq i \leq k} (q_{ti} \wedge h_{ti} \wedge s_{ti}) \right],$$

missä k on n:stä riippumaton vakio.

- Lausekalkyylin osittelulakien nojalla saadaan tästä myös kaavalle G_6''' konjunktiivinen normaalimuoto:

$$G_6''' = \bigwedge_t \bigwedge_{\alpha \in \{q,h,s\}^k} \left[\neg q_{t0} \vee \neg h_{t0} \vee \neg s_{t0} \vee \bigvee_{1 \leq i \leq k} \alpha(i)_{ti} \right].$$

- Tämä normaalimuoto on tosin noin 3^k kertaa alkuperäisen kaavan kokoinen, mutta koska k on vakio, kasvu ei haittaa.
- □

3SAT:n täydellisyys I

Lause

3SAT on NP-täydellinen.

Todistus:

- Selvästi 3SAT on NP:ssä.
- Riittää osoittaa, että $NP \leq_m^p 3SAT$.
- Olkoon $F = C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_m$, missä
- $C_k = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee ... \vee \alpha_r$, $r \geq 3$.
- Korvataan C_k:t 3-cnf -muotoisella kaavalla

$$C_k' = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee t_1) \wedge (\neg t_1 \vee \alpha_3 \vee t_2) \wedge (\neg t_2 \vee \alpha_4 \vee t_3) \wedge ... \vee (\neg t_{r-3} \vee \alpha_{r-1} \vee \alpha_r),$$

missä $t_1, t_2, ..., t_{r-3}$ ovat uusia muuttujia.

3SAT:n täydellisyys II

- Kukin kaava C'_k voidaan selvästi muodostaa vastaavasta kaavasta C_k polynomisessa ajassa.
- Tarkastetaan vielä, että muunnos $F \mapsto F'$ säilyttää kaavojen toteutuvuuden ja toteutumattomuuden, so. että muunnos täyttää palautusehdon $F \in \mathrm{CSAT}$ jos ja vain jos $F' \in \mathrm{3SAT}$:
- Jos F toteutuva, niin F' on myös toteutuva: Tarkastellaan jotain kaavan F tekijää C_k ja vastaavaa F':n tekijää C'_k.
- Minkä tahansa F:n toteuttavan totuusarvoasetuksen täytyy asettaa jonkin C_k:ssa esiintyvän literaalin α_i arvoksi 1.
- Tästä saadaan C'_k:n toteuttava totuusarvoasetus asettamalla literaalien α_i arvot samoin, ja uusien muuttujien arvot seuraavasti:

$$t_j = \begin{cases} 1, & \text{jos } j \leq i-1; \\ 0, & \text{jos } j > i-2. \end{cases}$$

3SAT:n täydellisyys III

- Jos F' toteutuva, niin myös F on toteutuva: Mikä tahansa kaavan F' toteuttava totuusarvoasetus toteuttaa erityisesti kutakin F:n tekijää C_k vastaavan alikaavan C'_k.
- Tällöin joko jokin alikaavassa esiintyvistä literaaleista $\alpha_1, ..., \alpha_r$ saa arvon 1 ja tekijä C_k toteutuu, tai jollakin $i < r-3$ on $t_i = 1$, $t_{i+1} = 0$.
- Mutta myös jälkimmäisessä tapauksessa on oltava $\alpha_{i+2} = 1$, ja tekijä C_k toteutuu.
- Edellä on tarkasteltu vain vähintään neljä literaalia sisältävien tekijöiden muuntamista 3-cnf -muotoon. Yksinkertaisemmat tekijät käsitellään seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
C_k = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3 &\implies C'_k = C_k, \\
C_k = \alpha_1 \vee \alpha_2 &\implies C'_k = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee t) \wedge (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \neg t), \\
C_k = \alpha &\implies C'_k = (\alpha \vee t_1 \vee t_2) \wedge (\alpha \vee t_1 \vee \neg t_2) \wedge \\
&\qquad (\alpha \vee \neg t_1 \vee \neg t_2).
\end{aligned}
$$

3SAT:n täydellisyys IV

- selvästi myös nämä muunnokset säilyttävät kaavojen toteutuvuusominaisuudet. □

Lause

Klikki-ongelma on NP-täydellinen.

- On jo todistettu, että 3SAT voidaan palauttaa polynomisesti klikki-ongelmaan.
- Samoin on jo näytetty, että klikki-ongelma kuuluu NP:hen.
- Siten lause on tosi. □

Solmupeiteongelma I

Määritelmä

- *G suuntaamaton verkko.*
- *G:n solmupeite on sellainen solmujoukon osajoukko, että jokainen särmä koskettaa jotain solmupeitteen solmua.*
- *Solmupeiteongelmassa kysytään, sisältääkö verkko tietyn kokoisen solmupeitteen.*

Solmupeiteongelma II

Lause

Solmupeiteongelma on NP-täydellinen.

Todistus.

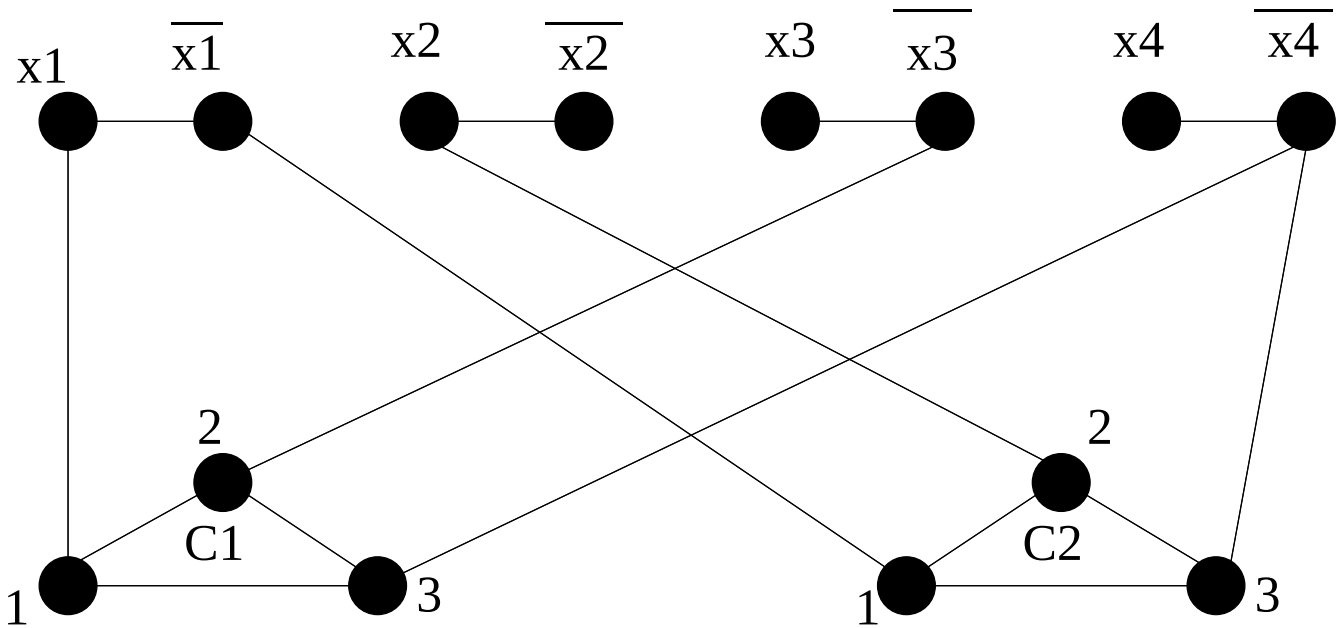
- Pitää jälleen osoittaa, että ongelma kuuluu NP:hen ja että jokainen NP:n ongelma voidaan palauttaa solmupeiteongelmaan.
- NP:hen kuuluminen on helppo osoittaa. Todistus eli sertifikaatti on yksinkertaisesti k:n kokoinen solmupeite. Sen testaaminen sujuu helposti polynomisessa ajassa.
- Palautetaan seuraavaksi 3SAT solupeiteongelmaan. Tämä vaatii hieman kekseliäisyyttä.

Solmupeiteongelma III

Seuraava kuva näyttää, miten kaavaa

$$\phi = (x_1 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$$

vastaava verkko G ja solmupeitteen koko k konstruoidaan:



Lisäksi $k = 8$.

Solmupeiteongelma IV

Konstruktion kuvaus:

- Olkoon

$$F = C_1 \wedge ... \wedge C_m$$

3-cnf -muotoinen lausekalkyylin kaava, jossa esiintyvät muuttujat $x_1, ..., x_n$. Muodostetaan verkko G.

- G:ssä on solmu kullekin literaalille x_i ja $\bar{x}_i$, missä $i = 1, ..., n$, sekä kutakin F:n tekijää C_j kohden kolme solmua C_j^1, C_j^2 ja C_j^3, missä $j = 1, ..., m$.
- Verkossa on seuraavat kaaret:
  - $(x_i, \bar{x}_i)$, $i = 1, ..., m$;
  - (C_j^1, C_j^2), (C_j^2, C_j^3), (C_j^3, C_j^1), $j = 1, ...m, m$.
  - jos $C_j = (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \alpha_3)$, niin $C_j^1, \alpha_1)$, (C_j^2, α_2), (C_j^3, α_3), $j = 1, ..., m$.
- Arvoksi k valitaan luku $n + 2m$.

Solmupeiteongelma V

Verkko G voidaan selvästi muodostaa kaavasta F polynomisessa ajassa. Osoitetaan, että G:llä on enintään k solmun solmupeite, jos ja vain jos F on toteutuva.

- Olkoon $t : \{x_1, ..., x_n\} \longrightarrow \{0, 1\}$ jokin kaavan F toteuttava totuusarvoasetus.
- Vastaavaan verkon G solmupeitteesen V' otetaan ensin kutakin literaaliparia x_i, $\bar{x_i}$ kohden se solmu, jota vastaava literaali saa arvon 1.
- Tämän jälkeen on kustakin C_j-kolmiosta ainakin yhdestä kulmasta alkava kaari $C_j^r, \alpha_r)$ jo peitetty, ja peitteeseen lisätään kolmion kaksi muuta kulmasolmua.
- Näin saatu solmujoukko V' selvästi peittää kaikki G:n kaaret ja $|V'| = n + 2m = k$.

Solmupeiteongelma VI

Olkoon toisaalta V' jokin G:n solmupeite, jolla $|V'| \leq k$.

- Koska V':n on sisällettävä vähintään yksi solmu kustakin literaaliparista x_i, $\bar{x}_i$, ja vähintään kaksi solmua kustakin C_j-kolmiosta, on oltava myös $|V'| \geq n + 2m = k$.
- Siten $|V'| = k$, ja V' sisältää täsmälleen yhden solmun kustakin literaaliparista ja täsmälleen kaksi solmua kustakin C_j-kolmiosta.
- Saadaan muuttujien totuusarvoasetus

$$t(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{jos } x_i \in V'; \\ 0 & \text{jos } \bar{x}_i \in V'. \end{cases}$$

Solmupeiteongelma VII

- Nyt kunkin kolmion kärjistä alkavista kaarista vain kaksi voi olla kolmiosta peitteeseen valittujen solmujen peittämiä; kolmannen peittää jokin literaalisolmu $\alpha \in V'$.
- Mutta tällöin $t(\alpha) = 1$, ja totuusarvoasetus t toteuttaa tekijän C_j. $\square$

Hamiltonin kehä -ongelma

Määritelmä

Olkoon G suunnattu verkko. Solmuja s ja t yhdistävä G:n polku on Hamiltonin kehä, jos polku kulkee kaikkien G:n solmujen kautta täsmälleen kerran.

Lause

Halmiltonin kehä -ongelma on NP-täydellinen.

Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus

- Aikaisemmin on jo näytetty, että Hamiltonin kehä kuuluu NP:hen.
- Jää näytettäväksi, että jokainen NP:n kieli voidaan palauttaa Hamiltonin kehään.
- Tämä osoitetaan konstruoimalla palautus

$$3\mathrm{SAT} \leq_p \mathrm{HAMPATH}.$$

- Lähtökohtana siis on lausekalkyylin kaava muotoa

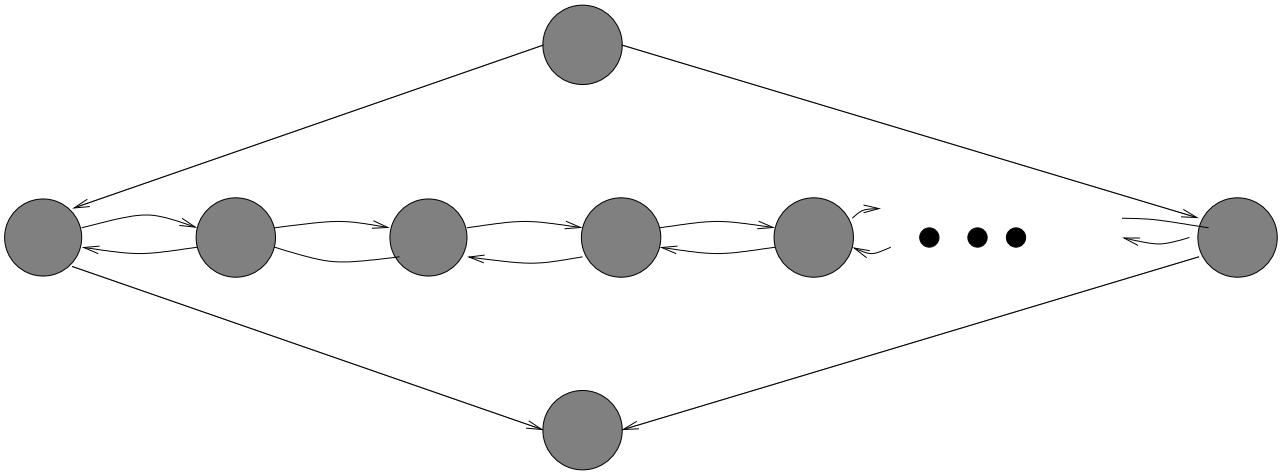
$$\phi = (a_1 \vee b_1 \vee c_1) \wedge (a_2 \vee b_2 \vee c_2) \wedge \cdots \wedge (a_k \vee b_k \vee c_k),$$

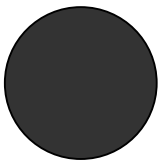
missä jokainen a, b ja c on literaali x_i tai $\bar{x}_i$.

- Olkoot $x_1, \ldots, x_m$ kaavan ϕ m muuttujaa.
- Pitää konstruoida verkko G, jossa on Hamiltonin kehä silloin ja vain silloin, kun kaava on toteutuva.

Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus II

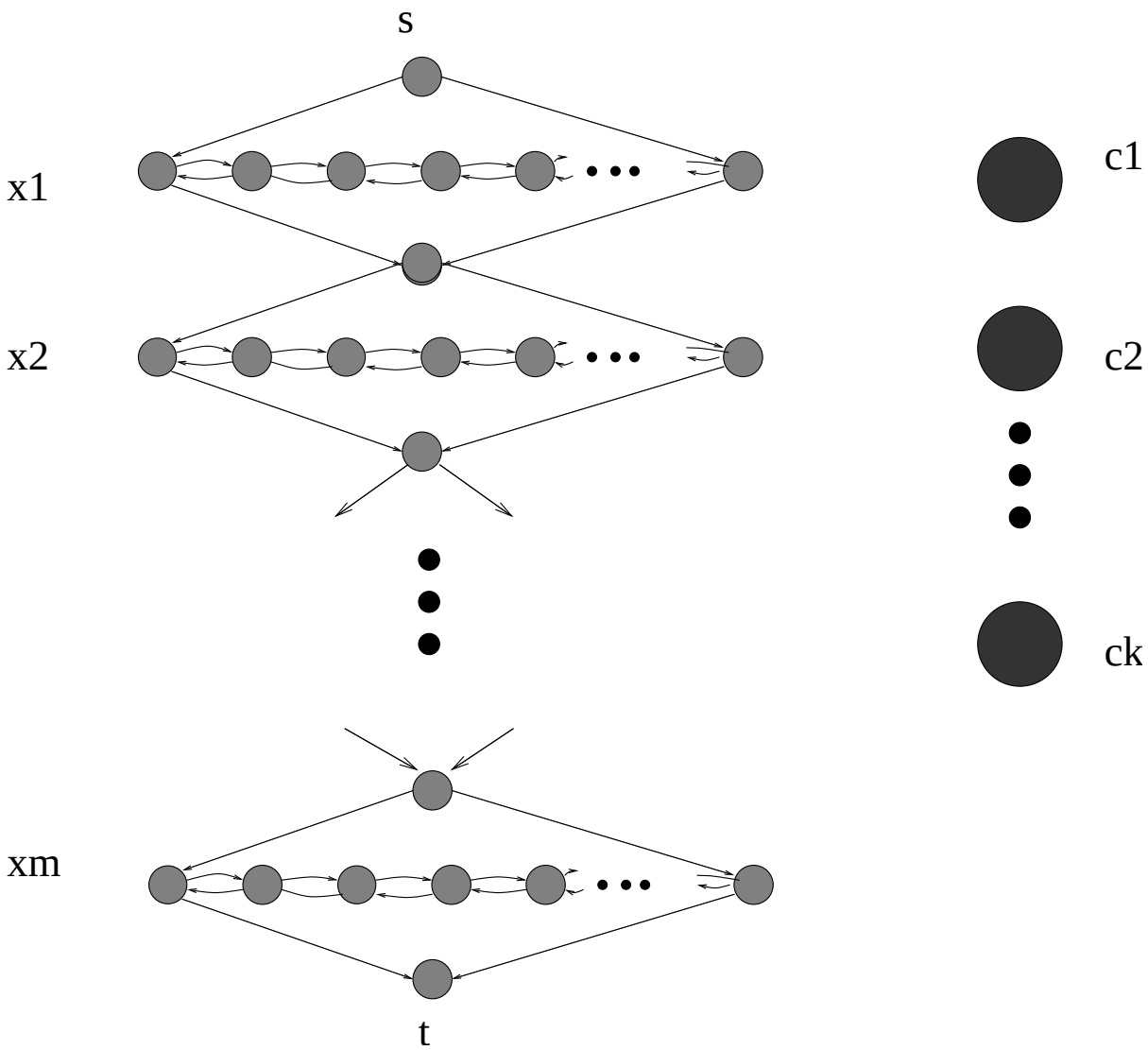
- Asetetaan jokaista muuttujaa x_i vastaamaan timantin muotoinen solmujoukko:



- Timantin keskellä olevien solmujen lukumäärä määrätään myöhemmin.
- Jokaista ϕ:n tekijää (clause) vastaa yksi solmu, 

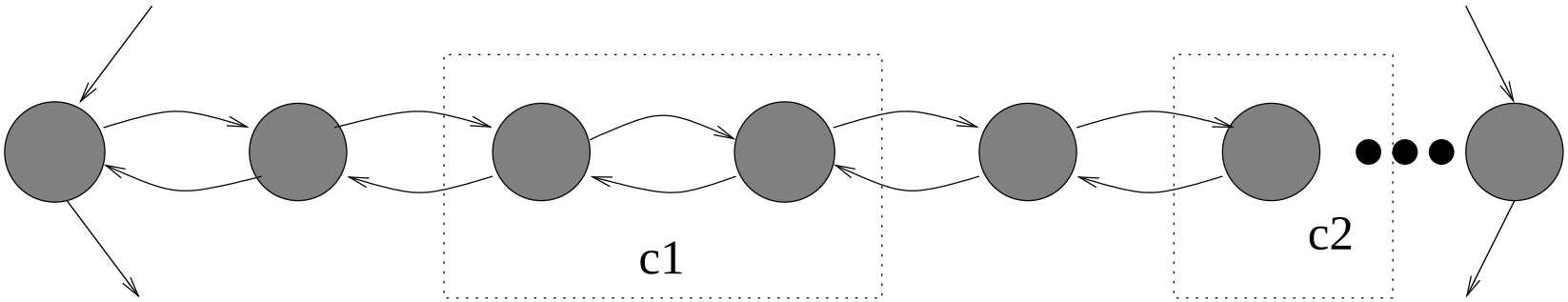
Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus III

- Seuraavassa kuviossa nähdään verkon globaali rakenne:



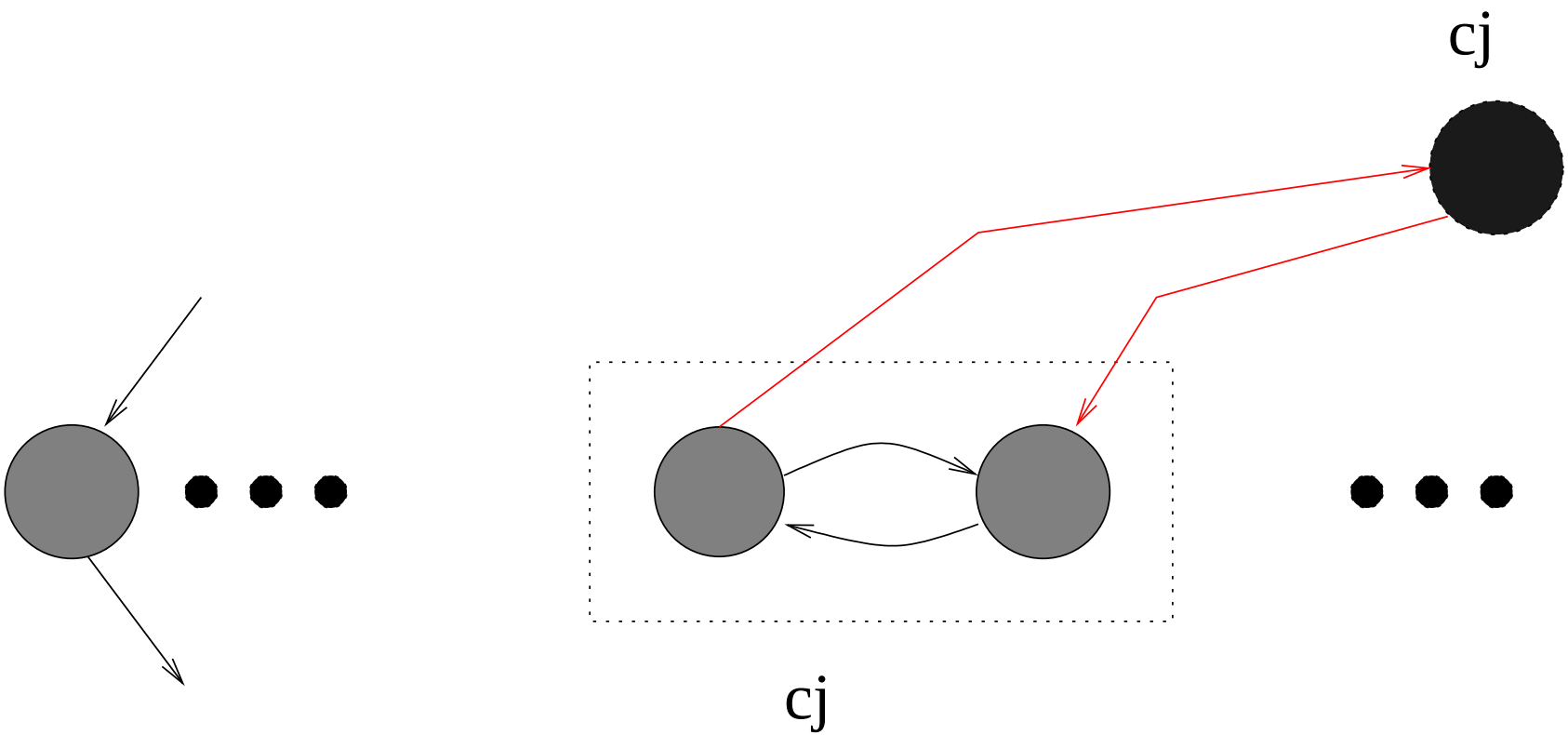
Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus IV

- Kuviossa ei ole vielä piirretty muuttujien ja tekijöiden välisiä kaaria.
- Jokaisessa muuttujaa vastaavassa timantissa on keskellä solmujen ketju, joka on kaksisuuntainen.
- Ketju sisältää $3k + 1$ solmua loppusolmujen lisäksi. Nämä $3k + 1$ solmua ryhmitellään pareiksi siten, että kukin pari vastaa yhtä tekijää ja parien välissä on yksi solmu. Seuraava kuvio valaisee asiaa:



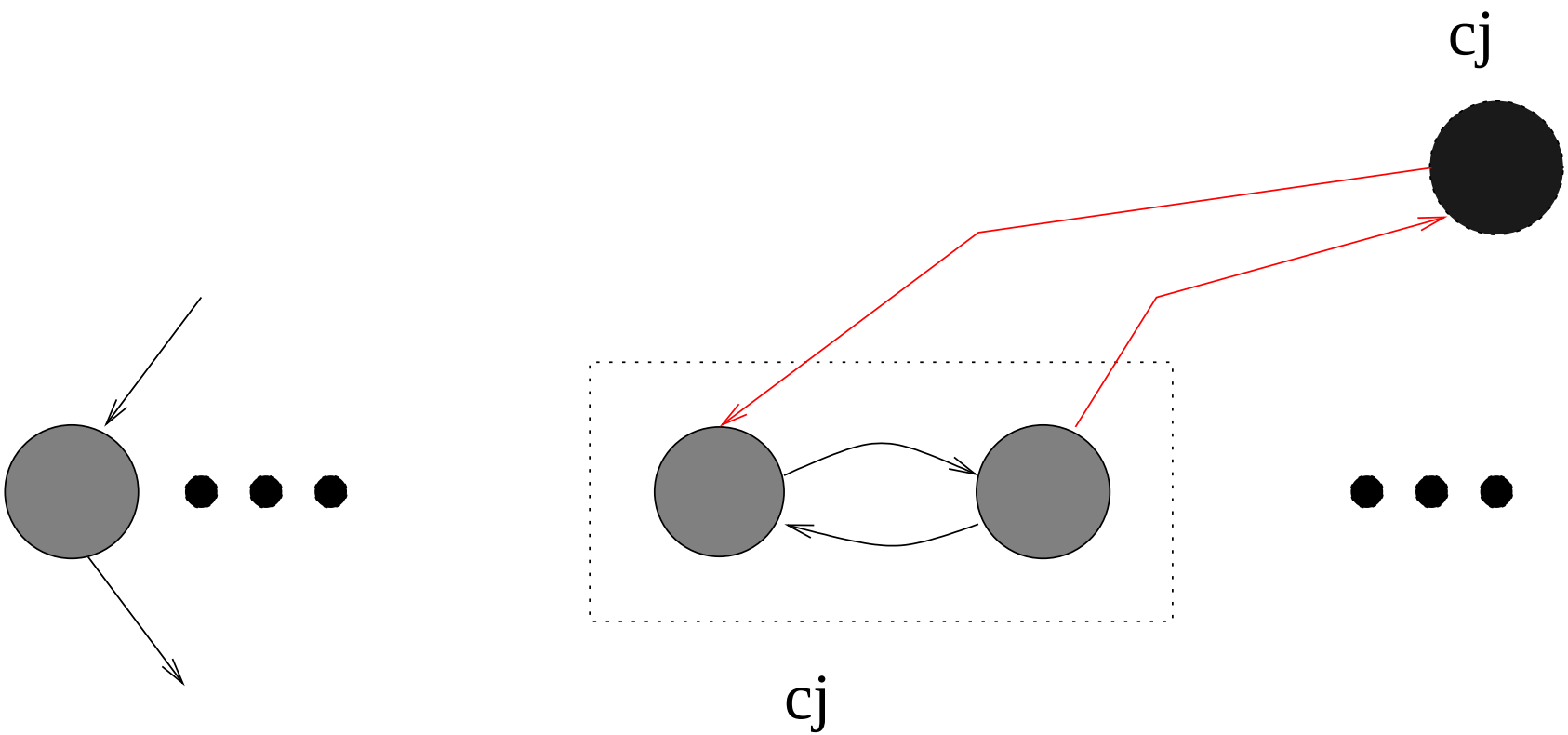
Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus V

- Jos muuttuja x_i esiintyy tekijässä c_j, niin lisätään seuraavat kaaret i. timantin j.parista j. tekijän solmuun:



Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus VI

- Jos $\bar{x}_i$ esiintyy tekijässä c_j, lisätään samat kaaret kuin edellä, mutta kaarien suunta on päinvastainen.



Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus VII

- Pitää osoittaa, että verkossa on Hamiltonin kehä s:stä t:hen, jos ja vain jos kaava on toteutuva. Oletetaan ensiksi, että kaava on toteutuva.
- onstruoidaan ensin polku, joka kulkee kaikkien solmujen paitsi solmujen c_j kautta. Polku lähtee s:stä ja kulkee jokaisen timantin läpi seuraavasti.
- Ensin tullaan timantin yläsolmuun. Vastatkoon timantti muuttujaa x_i.
- Jos x_i:n arvo on tosi, siirrytään vasemmalle ja jatketaan ketjun läpi oikealle ja lopuksi alas.
- Jos x_i:n arvo on epätosi, siirrytään oikealle ja jatketaan timantin ketjun läpi vasemmalle ja alas.

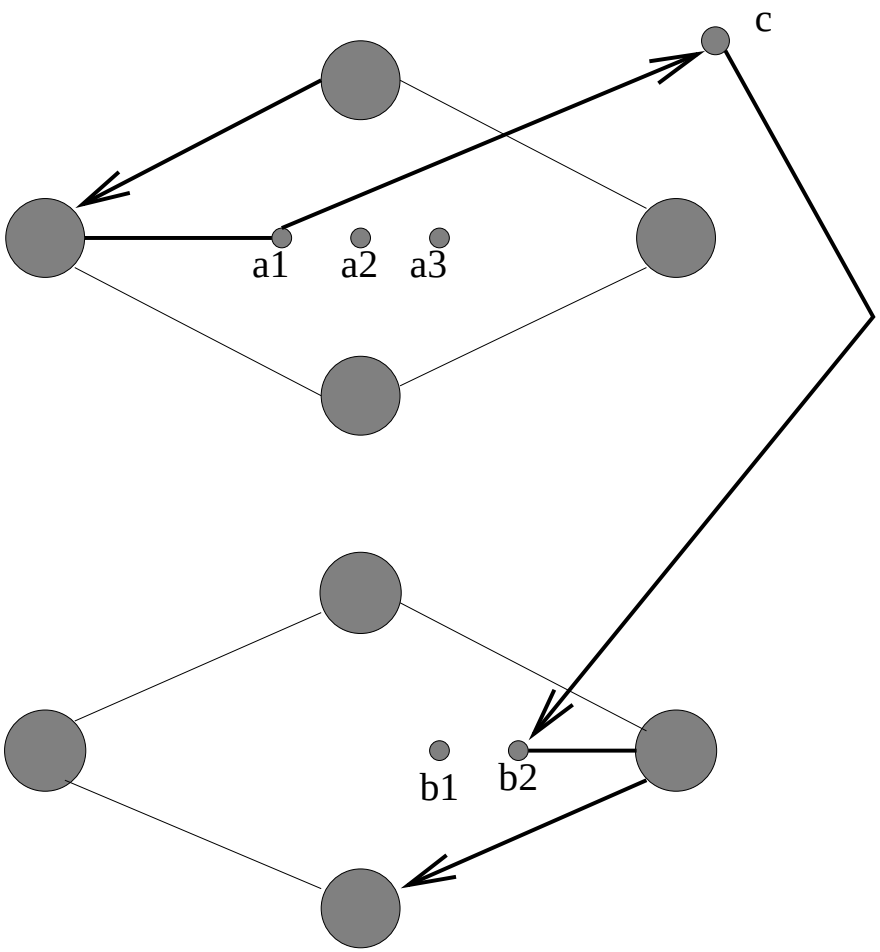
Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus VIII

- Seuraavaksi täytyy ratkaista, miten tekijäsolmut c_j otetaan huomioon.
- Käydään läpi jokainen tekijä c_j ja valitaan niistä yksi literaali, x_i tai $\bar{x}_i$, joka on sijoituksessa saanut arvon tosi.
- Jos on valittu x_i tekijässä c_j, voimme "koukata"c_j:n kautta, kun kuljetaan pitkin timantin i ketjua vasemmalta oikealle. Tämä onnistuu, sillä x_i on saanut arvon tosi ja polku kulkee timantissa vasemmalta oikealle ja koukkaus c_j:n kautta ei ole ristiriidassa tämän kulkusuunnan kanssa.
- Jos on valittu $\bar{x}_i$, voimme taas kulkea c_j:n kautta, sillä nyt polku timantin i läpi kulkee oikealta vasemmalle ja koukkaus sopii yhteen tämän suunnan kanssa.
- Jos tekijässä on useita tosia literaaleja, valitaan vain yksi.
- Näin saadaan aikaan Hamiltonin polku.

Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus IX

- On vielä osoitettava, että mikäli verkossa on Hamiltonin polku, kaava on toteutuva.
- Jos polku on normaali, eli kulkee timantit järjestyksessä läpi yhdestä m:ään, saadaan totuuarvoasetus katsomalla, mihin suuntaan polku kulkee muuttujaa x_i vastaavassa timantissa. Jos se kulkee vasemmalta oikealle, otetaan muuttujalle x_i arvoksi tosi, muuten epätosi.
- On siten vain osoitettava, että jokainen Hamiltonin polku on normaali.
- Normaalisuus katoaa vain, jos polku tekijäsolmuun yhdestä timantista ja palaa takaisin toiseen timanttiin. Seuraava kuva valaiseen tilannetta:

Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus X



Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus XI

- Polku menee solmusta a_1 solmuun c, mutta a_2:n sijasta palaa solmuun b_2 toisessa timantissa.
- Tällöin joko a_2 tai a_3:n täytyy olla erottava solmu parien välissä.
- Jos a_2 on erottava solmu, ainoat solmuun a_2 tulevat kaaret tulevat joko a_1:stä tai a_3:sta.
- Jos a_3 on erottava solmu, a_1 ja a_2 ovat samassa parissa, jolloin ainoat a_2:een tulevat kaaret ovat peräisin a_1:stä, a_3:sta tai c:stä.
- Kummassakaan tapauksessa polku ei voi sisältää a_2:ta.

Hamiltonin kehän NP-täydellisyystodistus XII

- Jos nimittäin polku ei voi tulla a_2:een c:stä tai a_1:stä, koska polku menee näistä solmuista muualle.
- Polku ei saapua a_2:een a_3:sta, koska a_3 on ainoa solmu, johon a_2:sta voi vielä siirtyä.
- Siten polun täytyy tulla a_2:sta a_3:een ja Hamiltonin polku on normaali.
- Lopuksi todetaan, että palautus toimii polynomisessa ajassa. □

Osasummaprobleema

Lause

Osasummaprobleema SUBSET-SUM on NP-täydellinen.

Todistus. Tiedetään, että SUBSET-SUM kuuluu NP:hen. Näytetään, että 3SAT voidaan palauttaa polynomisessa ajassa SUBSET-SUM -ongelmaan.

- Olkoon ϕ Boolen kaava, jossa muuttujat $x_1, ..., x_n$ ja termit $c_1, ..., c_k$.
- Muodostetaan taulukko, jossa on jokaista muuttujaa x_i kohti kaksi riviä, joita kutsutaan y_i-riviksi ja z_i-riviksi.
- Lisäksi jokaista termiä c_i kohti on kaksi riviä, joita kutsutaan g_i-riviksi ja h_i-riviksi.
- Viimeisenä on vielä rivi, jota kutsutaan t-riviksi.
- Jokainen rivi koostuu biteistä 0 ja 1 ja rivi tulkitaan desimaaliluvuksi.
- Seuraavassa on kuva taulukosta.

	1	2	3	4	$\cdots$	n	c_1	c_2	$\cdots$	c_k
y_1	1	0	0	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0
z_1	1	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0
y_2		1	0	0	$\cdots$	0	0	1	$\cdots$	0
z_2		1	0	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0
.					.	.		.		.
.					.	.		.		.
.					.	.		.		.
y_n						1	0	0	$\cdots$	0
z_n						1	0	0	$\cdots$	0
g_1							1	0	$\cdots$	0
h_1							1	0	$\cdots$	0
.										.
.										.
.										.
g_k										1
h_k										1
t	1	1	1	1	$\cdots$	1	3	3	$\cdots$	3

- Siis lukua x_i vastaa desimaaliluku, jonka kokonaisosassa on ykkönen ja $n - i$ nollaa.
- Desimaaliosa eli oikeanpuoleinen osa sisältää yhden bitin jokaista termiä kohti. Tarkemmin sanottuna y_i:n j. bitti on yksi, jos termi c_j sisältää literaalin x_i. Vastaavasti z_i:n j. bitti on yksi, jos c_j sisältää literaalin $\bar{x_i}$.
- Jos bittiä ei ole määritelty yhdeksi, se on nolla.
- Taulukossa näkyy kaavaa

$$(x_1 \vee \bar{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \cdots) \wedge \cdots \wedge (\bar{x_3} \vee \cdots \vee \cdots)$$

  vastaavia arvoja.
- Lisäksi jokaista termiä c_j vastaa pari g_j, h_j. Nämä kaksi lukua ovat identtiset, alkavat ykkösellä, jota seuraa $k - j$ nollaa.
- t:n arvo näkyy taulukosta; se on aina saman muotoinen.

- Osoitetaan, että konstruktio toimii. Oletetaan ensin, että ϕ on toteutuva.
- Muodostetaan luvuista y_i ja z_i sellainen joukko S, että joukon lukujen summa on t.
- Valitaan y_i, jos x_i:n arvo on tosi totuusarvoasetuksessa, ja z_i, jos $\bar{x}_i$ on tosi.
- Huomataan, että näillä valinnoilla lukujen summan kokonaisosa on yksi, sillä aina valitaan joko y_i tai z_i kultakin riviltä.
- Toisaalta desimaaliosan luvut ovat väliltä 1 ja 3, sillä jokainen termi on toteutuva ja käsittää korkeintaan kolme eri literaalia.
- Täydennetään S:ää tarvittaessa ottamalla tarpeellinen määrä g_i ja h_i lukuja.
- Näin siis saadaan aikaan osasummaprobleema (S, t), joka on ratkeava.

- Oletetaan nyt, että S:llä on osajoukko, jonka alkioiden summa on t.
- Konstruoidaan ϕ:n totuusarvoasetus.
- Ensinnäkin kaikki numerot luvuissa ovat joko nollia tai ykkösiä.
- Jokainen sarake käsittää korkeintaan viisi ykköstä.
- Siten sarakkeella ei milloinkaan tapahdu yhteenlaskun ylivuotoa muistinumeroineen.
- Jotta summaksi kokonaisosassa tulisi 1, joko y_i:n tai z_i:n täytyy olla 1, muttei molempien.
- Nyt voidaan konstruoida totuusarvoasetus.

- Jos osajoukko siäsältää y_i:n, asetetaan x_i todeksi, muuten epätodeksi.
- Tämän totuusarvoasetuksen täytyy tehdä ϕ todeksi, sillä desimaaliosassa jokainen luku on 3.
- Tästä kolmosesta vain kaksi tulee g_i:stä ja h_i:stä, joten viimeisen yhden täytyy tulla y_i:stä tai z_i:stä.
- Jos tämä on y_i, niin x_i esiintyy c_j:ssä ja omaa arvon tosi, joten c_j on tosi. Jos tämä on z_i, niin $\bar{x_i}$ esiintyy c_j.ssä ja x_i on epätosi, joten c_j on tosi.
- Siten ϕ on toteutuva.
- Taulukon koko on noin $(n+k)^2$ ja jokainen paikka taulukossa on helposti laskettavissa kaavasta ϕ. Siten kokonaisaika on neliöllinen kaavan kokoon nähden.