Taipumattomuus

- Tässä jaksossa käsitellään ongelmia, jotka ovat periaatteessa ratkeavia, mutta joiden ratkaisu vaatii niin paljon aikaa tai tilaa, ettei ratkaisu ole käytännössä kelvollinen.
- Useimmat olettavat, että NP-täydelliset probleemat ovat taipumattomia (intractable), mutta tätä ei ole todistettu.
- On olemassa muita probleemoja, joiden taipumattomuus on sen sijaan todistettu.
- Tarkastelemme tässä jaksossa näitä probleemoja ym asiaan liittyvää. Jakso on katsauksenomainen, kaikki tekniset yksityiskohdat sivuutetaan.

Hierarkialauseet

Määritelmä

Funktio $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, *missä* $f(n) = \mathcal{O}(\log n)$, *on tilakonstruoituva, jos sellainen funktio, joka kuvaa merkkijonon* 1^n $f(n)$*:n binääriesitykselle, on laskettavissa tilassa* $\mathcal{O}(f(n))$.

Lause

Mitä tahansa tilakonstruoituvaa funktiota $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ *kohti on olemassa kieli A, joka voidaan tunnistaa tilassa* $\mathcal{O}(f(n))$, *mutta ei tilassa* $o(f(n))$.

Lauseen mukaan löytyy siis tilan käytön kannalta mielivaltaisen vaikeita probleemoja.

Corollary

Kaikille funktioille $f_1, f_2 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, *joilla* $f_1(n) = o(f_2(n))$ *ja* f_2 *on tilakonstruoituva,* $\mathrm{SPACE}(f_1(n)) \subsetneq \mathrm{SPACE}(f_2(n))$.

Corollary

Kaikille reaaliluvuille $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\mathrm{SPACE}(n^{\varepsilon_1}) \subsetneq \mathrm{SPACE}(n^{\varepsilon_2}).$$

Corollary

$\mathrm{NL} \subsetneq \mathrm{PSPACE}$.

Corollary

$\mathrm{PSPACE} \subsetneq \mathrm{EXPSPACE}$.

Ajallisesti konstruoitavissa

Määritelmä

Funktion $t : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$*, missä* $t = \mathcal{O}(n \log n)$*, sanotaan olevan konstruoitavissa ajallisesti, jos funktio, joka kuvaa* 1^n*:n* $t(n)$*:n binääriesitykselle, on laskettavissa ajassa* $\mathcal{O}(t(n))$*.*

Lause

Jokaista ajallisesti konstruoituvaa funktiota $t : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ *kohti on olemassa kieli* A*, joka voidaan tunnistaa ajassa* $\mathcal{O}(t(n))$*, mutta ei ajassa* $o(t(n)/\log t(n))$*.*

Corollary

Kaikille funktioille $t_1, t_2 : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$, *joilla* $t_1(n) = o(t_2(n)/\log t_2(n))$ *ja* t_2 *on konstruoitavissa ajallisesti,* $\mathrm{TIME}(t_1(n)) \subsetneq \mathrm{TIME}(t_2(n))$.

Corollary

Kaikille reaaliluvuille $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\mathrm{TIME}(n^{\varepsilon_1}) \subsetneq \mathrm{TIME}(n^{\varepsilon_2}).$$

Corollary

$\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{EXPTIME}$.

Yleistetyt säännölliset lausekkeet

- Oletetaan, että käytössä on säännöllisten lausekkeiden operaatiot.
- Lisätään näiden joukkoon eksponenttioperaatio $\uparrow$:

$$R \uparrow k = R^k = \overbrace{RRR...R}^{k}.$$

- Eli lauseke katenoidaan itseensä argumentin k osoittamaan kertaan.
- Määritellään nyt probleema $EQ_{\mathrm{REX}\uparrow}$ parien (P, Q) joukoksi, missä P ja Q ovat ekvivalentteja säännöllisiä lausekkeita, joissa sallitaan eksponenttioperaatio.

Määritelmä

Kieli B on EXPSPACE-täydellinen, jos

1. $B \in \mathrm{EXPSPACE}$ *ja*
2. *jokainen* $A \in \mathrm{EXPSPACE}$ *on palautettavissa* B*:hen polynomisessa ajassa.*

Lause

$EQ_{\mathrm{REX}\uparrow}$ *on EXPSPACE-täydellinen.*

Relativisointi

Määritelmä

- *Oraakkeli kielelle A on laite, kykenee ilmoittamaan, kuuluuko mielivaltainen merkkijono A:han vai ei.*
- *Oraakkeli Turingin kone* M^A *on modifioitu Turingin kone, joka voi tehdä kysymyksen oraakkelille.*
- *Kysymys tehdään siten, että kone* M^A *kirjoittaa merkkijonon erityiselle oraakkelinauhalle ja oraakkeli vastaa samassa askeleessa, kuuluuko merkkijono kieleen A vai ei.*
- *Määritellään,että* P^A *on niiden kielten joukko, jotka voidaan tunnistaa polynomisessa ajassa oraakkelikoneella, jonka oraakkeli on A.*
- *Luokka* NP^A *määritellään vastaavasti.*

Example

NP$\subseteq \mathrm{P}^{\mathrm{SAT}}$. Myös coNP$\subseteq \mathrm{P}^{\mathrm{SAT}}$, koska deterministiset luokat ovat suljettuja komplementoinnin suhteen.

Määritelmä

Kaksi Boolen kaavaa ϕ ja ψ, jotka sisältävät muuttujat $x_1, \ldots, x_n$, ovat ekvivalentteja, jos kaavoilla on sama totuusarvo annettiinpa muuttujille mitkä arvot tahansa. Kaava on minimaalinen, jos ei ole olemassa pienempää ekvivalenttia kaavaa.

Example

- NONMIN-FORMULA koostuu Boolen kaavoista, jotka eivät ole minimaalisia.
- NONMIN-FORMULA ei näytä kuuluvan NP:hen, joskaan tätä ei tiedetä varmasti.
- Luokka kuuluu $\mathrm{NP}^{\mathrm{SAT}}$:iin.
- Nimittäin epädeterministinen oraakkelikone arvaa pienemmän ekvivalentin kaavan, testaa SAT:in avulla, onko arvattu kaava todella ekvivalentti ja hyväksyy syötteen, jos se on.
- Ekvivalenssitestin olemassaolo seuraa siitä, että epäekvivalenssiongelma on NP:ssä, koska arvaamalla voidaan löytää muuttujien arvoasetukset, jotka antavat lausekkeille eri totuusarvot.
- Siten ekvivalenssiongelma on coNP:ssä. Toisaalta coNP$\subseteq \mathrm{P}^{\mathrm{SAT}}$, josta väite seuraa.

Lause

1. *On olemassa oraakkeli A, jolla* $\mathrm{P}^A \neq \mathrm{NP}^A$.
2. *On olemassa oraakkeli B, jolla* $\mathrm{P}^B = \mathrm{NP}^B$.