

### Laskennan vaativuus, harjoitus 3

Harjoituksen 3 tehtävien ratkaisuun on aikaa kaksi viikkoa. Palautukset kirjallisena perjantaina 13.4. joko sähköpostitse Harri Forsgrenille tai luennolla luennoitsijalle. Palautetilaisuus tiistaina 17.4.

1. Uskotaan, ettei luennoilla määritelty kieli PATH ole NP-täydellinen. Perustele tätä uskomusta. Näytä, että mikäli PATH ei ole NP-täydellinen, niin sen perusteella voitaisiin päätellä, että  $P \neq NP$ .
2. Olkoon  $M$  seuraava yksinkertainen deterministinen Turingin kone:

$$q_0 \xrightarrow{1/1,R} q_1 \xrightarrow{</<,L} q_{\text{yes}}.$$

Koneen aakkosto on binääriaakkosto  $\{0, 1\}$  ja se siis hyväksyy syötteenä täsmälleen yhden ykkösen.

Laadi konetta  $M$  vastaava Boolean kaava, joka edustaa Cookin ja Levinin lauseen todistuksessa annettua yleistä kaavaa.

3. Muunna edellisessä tehtävässä laatimasi kaava konjunkttiiviseen normaalimuotoon.
4. Kaksi verkkoa  $G = (V, E)$  ja  $H = (W, F)$  ovat *isomorfisia*, jos on olemassa sellainen bijektio  $f : V \rightarrow W$ , että  $(v_i, v_j) \in E$  jos ja vain jos  $(f(v_i), f(v_j)) \in F$ . Olkoon ISO alkioiden  $\langle G, H \rangle$  muodostama joukko, missä  $G$  ja  $H$  ovat isomorfisia verkkoja. Näytä, että ISO kuuluu NP:hen.
5. Olkoon  $K$  kieli, joka koostuu alkioista  $\langle M, x, 1^t \rangle$ , missä  $M$  on epädeterministinen Turingin kone, joka hyväksyy  $x$ :n korkeintaan  $t$ :ssä askeleessa. Osoita, että tämä teoreettinen kieli  $K$  on NP-täydellinen.
6. Näytä, että jos kieli  $L$  on NP-täydellinen, niin myös sen sulkeuma  $L^*$  on NP-täydellinen.
7. Suuntaamattoman verkon  $G = (V, E)$  *riippumaton joukko* on solmujoukko  $V$ :n osajoukko, jonka solmujen välillä ei kulje yhtään särmää.

Todista seuraava lemma: *Olkoon  $G = (V, E)$  suuntaamaton verkko ja  $V' \subseteq V$ . Tällöin seuraavat kome ehto ovat ekvivalentit:*

- $V'$  on  $G$ :n solmupeite;
  - $V \setminus V'$  on riippumaton solmujoukko  $G$ :ssä;
  - $V \setminus V'$  on klikki  $G$ :n komplementtiverkossa  $\bar{G} = (V, (V \times V) \setminus E)$ .
8. Riippumaton joukko -ongelma koostuu alkioista  $(G, k)$ , missä  $G$  on suuntaamaton verkko, jossa on  $k$ :n solmun kokoinen riippumaton joukko. Osoita, että tämä ongelma on NP-täydellinen palauttamalla klikkiongelma siihen. Tee myös polynominen palautus solmupeiteongelmasta riippumaton joukko -ongelmaan.