Laskennan vaativuus **Ratkaisuehdotuksia**
Harjoitus 3, 13.4.2007

1. Väite: Jos PATH ei ole **NP**-täydellinen, niin $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

   Todistus: Oletetaan, että PATH ei ole **NP**-täydellien, ja tehdään vastaoletus $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$. Harjoitusten 2 tehtävästä 3 saadaan, että tällöin PATH on **NP**-täydellinen. Seurauksena olevasta ristiriidasta johtuen $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

2. Tehtävänannossa ei annettu syötettä, jota kaavan muodostuksessa kuitenkin tarvitaan. Jotta ratkaisuna ei jouduttaisi esittämään luentojen kaavoja melkein suoraan, valitaan syötteeksi "1". Laskenta-aikaa rajoittavasta polynomista $p(n) = 2$ saadaan tällöin $p(|1|) = 2$. Nauha-aakkostona on $\{>, 0, 1, <\}$, jolle annetaan numerointi $0 \ldots 3$ samassa järjestyksessä. Kaavassa F_1 käytettäviksi muuttujiksi saadaan

$$\begin{aligned} q[t,k],\ 0 \le t \le 2, 0 \le k \le 2, \\ h[t,i],\ 0 \le t \le 2, 0 \le i \le 3 \text{ ja} \\ s[t,i,j],\ 0 \le t \le 2, 0 \le i \le 3 \text{ ja } 0 \le j \le 3. \end{aligned}$$

   Haluttu kaava on muotoa $F_1 = G_1 \wedge G_2 \wedge G_3 \wedge G_4 \wedge G_5 \wedge G_6$, jossa

$$G_1 = \bigwedge_{0 \le t \le 2} \bigvee_{0 \le k \le 2} q[t,k] \;\wedge \bigwedge_{\substack{0 \le t \le 2 \\ 0 \le k,k' \le 2 \\ k \neq k'}} (\neg q[t,k] \vee \neg q[t,k']),$$

$$G_2 = \bigwedge_{0 \le t \le 2} \bigvee_{1 \le i \le 3} h[t,i] \;\wedge \bigwedge_{\substack{0 \le t \le 2 \\ 0 \le i < i' \le 3}} (\neg h[t,i] \vee \neg h[t,i']),$$

$$G_3 = \bigwedge_{\substack{0 \le t \le 2 \\ 0 \le i \le 3}} \bigvee_{0 \le j \le 3} s[t,i,j] \;\wedge \bigwedge_{\substack{0 \le t \le 2 \\ 0 \le i \le 3 \\ 0 \le j < j' \le 3}} (\neg s[t,i,j] \vee \neg s[t,i,j']),$$

$$G_4 = q[0,0] \wedge h[0,1] \wedge s[0,0,0] \wedge s[0,1,2] \wedge s[0,2,3] \wedge s[0,3,3],$$

$$G_5 = q[2,2],$$

$$G_6 = G_6' \wedge G_6'' \wedge G_6''',$$

$$G_6' = \bigwedge_{\substack{0 \le t \le 1 \\ 0 \le i \le 3 \\ 0 \le j \le 3}} ((s[t,i,j] \wedge \neg h[t,i]) \to s[t+1,i,j]),$$

$$G_6'' = \bigwedge_{\substack{0 \le t \le 1 \\ 0 \le i \le 3 \\ 0 \le j \le 3}} [(q[t,2] \wedge h[t,i] \wedge s[t,i,j]) \to (q[t+1,2] \wedge h[t+1,i] \wedge s[t+1,i,j])] \text{ ja}$$

$$G_6''' = \bigwedge_{0 \le t \le 1} \begin{bmatrix} [(q[t,0] \wedge h[t,1] \wedge s[t,1,2]) \to (q[t+1,1] \wedge h[t+1,2] \wedge s[t+1,1,2])] \\ \wedge[(q[t,1] \wedge h[t,2] \wedge s[t,2,3]) \to (q[t+1,2] \wedge h[t+1,1] \wedge s[t+1,2,3])] \end{bmatrix}$$

   Jos syötteenä olisi "0", niin kaava G_4 tulisi muuttaa vastaavaksi. Annettuun koneeseen ei oltu merkattu hylkäävää tilaa tai siirtymää hylkäävään tilaan, jos syötteenä on "0" tai yhtä pidempi syöte. Hylkäävän tilan lisääminen vaikuttaisi kaavoissa tilojen määrään suoraviivaisesti. Siirtymät puolestaan vaikuttavat kaavaan G_6'''. Nämä muutokset eivät kuitenkaan vaikuta siihen, että kaava F_x pätee vain kun G_5 pätee. Kaava G_5 pätee, jos se voidaan päätellä kaavasta G_4 muiden kaavojen avulla.

3. Kaavat G_1, G_2, G_3, G_3, G_4 ja G_5 ovat jo konjunktiivisessa normaalimuodossa. Loput kaavat ovat seuraavanlaiset:

$$G_6' = \bigwedge_{\substack{0\le t\le 1\\ 0\le i\le 3\\ 0\le j\le 3}} (\neg s[t,i,j] \vee h[t,i] \vee s[t+1,i,j]),$$

$$G_6'' = \bigwedge_{\substack{0\le t\le 1\\ 0\le i\le 3\\ 0\le j\le 3}} \begin{bmatrix} (\neg q[t,2] \vee \neg h[t,i] \vee \neg s[t,i,j] \vee q[t+1,i,j]) \\ \wedge(\neg q[t,2] \vee \neg h[t,i] \vee \neg s[t,i,j] \vee h[t+1,i]) \\ \wedge(\neg q[t,2] \vee \neg h[t,i] \vee \neg s[t,i,j] \vee s[t+1,i,j]) \end{bmatrix} \text{ ja}$$

$$G_6''' = \bigwedge_{0\le t\le 1} \begin{bmatrix} (\neg q[t,0] \vee \neg h[t,1] \vee \neg s[t,1,2] \vee q[t+1,1]) \\ \wedge(\neg q[t,0] \vee \neg h[t,1] \vee \neg s[t,1,2] \vee h[t+1,2]) \\ \wedge(\neg q[t,0] \vee \neg h[t,1] \vee \neg s[t,1,2] \vee s[t+1,1,2]) \\ \wedge(\neg q[t,1] \vee \neg h[t,2] \vee \neg s[t,2,3] \vee q[t+1,2]) \\ \wedge(\neg q[t,1] \vee \neg h[t,2] \vee \neg s[t,2,3] \vee h[t+1,1]) \\ \wedge(\neg q[t,1] \vee \neg h[t,2] \vee \neg s[t,2,3] \vee s[t+1,2,3]) \end{bmatrix}.$$

4. Olkoot $G = (V, E)$ ja $H = (W, F)$ verkkoja. Jotta nämä verkot olisivat isomorfisia, on oltava olemassa sellainen bijektio $f : V \to W$, että kaikilla $v, v' \in V$ pätee $(v, v') \in E$ joss $(f(v), f(v')) \in F$. Tehtävänä on osoittaa, että kaikkien isomorfisten verkkoparien kieli ISO kuuluu NP:hen. Muodostetaan epädeterministinen Turingin kone M_{ISO} verifioimaan sertifikaatti $(\langle G, H\rangle, f)$. Kuvaus f voidaan toteuttaa listana pareja (v, w), jossa $v \in V$ ja $w \in W$. Sertifikaatin rakenne ja se että f:ssä on $|V|$ paria voidaan tarkistaa polynomisessa ajassa.

   Tarkistetaan ensin, että joukot V ja W ovat yhtä suuret. Seuraavaksi tutkitaan, ettei millään $v, v' \in V$ ole $v \neq v'$, mutta $f(v) = f(v')$. Näillä vaatimuksilla kuvaus f on bijektio. Voidaan muodostaa myös käänteiskuvaus f^{-1}. Seuraavaksi tutkitaan jokaisella särmällä $(v, v') \in E$, päteekö $(f(v), f(v')) \in F$. Lopuksi tutkitaan jokaisella $(w, w') \in F$, päteekö $(f^{-1}(w), f^{-1}(w')) \in E$. Kaikki nämä voidaan toteuttaa polynomisessa ajassa, joten ISO $\in$ **NP**.

5. Olkoon $K = \{\langle M, x, 1^t\rangle \mid M$ on NTM, joka hyväksyy x:n korkeintaan t:ssä askeleessa$\}$. On näytettävä, että kieli $K \in$ **NP**. Olkon $\langle M, x, 1^t\rangle \in K$. Voidaan muodostaa NTM, joka simuloi M:n suoritusta syötteellä x edeten kuitenkin korkeintaan t askelta. Laskuri voidaan toteuttaa korvaamalla jokaisessa askeleessa syötteen osasta 1^t yksi "1" muulla soveltuvalla nauha-aakkosella. Koneen M simulointi onnistuu moninauhaisella NTM:llä siten, että M:n siirtymäsäännöt ja syöte ovat omalla nauhallaan ja koneen M konfiguraatio toisella nauhalla. Siirtymäsääntöjen soveltaminen käy polynomisessa ajassa ja siten koko t:n askeleen simulointi onnistuu polynomisessa ajassa.

   Osoitetaan seuraavaksi, että jokin kieli $A \in$ **NP** voidaan palauttaa K:ksi polynomisessa ajassa. Olkoon M_A NTM, joka ratkaisee syötteen x kuulumisen kieleen A ajassa, jota rajoittaa polynomi $p(|x|)$. Nyt voidaan muodostaa palautus

$$x \in A \iff \langle M_A, x, 1^{p(|x|)}\rangle \in K.$$

   Yllä olevista seikoista johtuen havaitaan, että K on **NP**-täydellinen kieli.

6. Tässä tehtävässä oli pieni ongelma, mistä johtuen hyvästä yrityksestä sai täydet pisteet. L^*:n täydellisyystodistusta on tuskin kukaan tehnyt, sillä siitä seuraisi, että $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

   Jos ratkaistaankin vain väite $L \in \mathbf{NP} \implies L^* \in \mathbf{NP}$, niin saadaan yleistys aikaisemmissa harjoituksissa esitetystä ongelmasta. Todistus voidaan suorittaa esimerkiksi induktiolla. Oletetaan, että $L^n \in \mathbf{NP}$. Kieli $L^{n+1} \in \mathbf{NP}$, sillä voimme jakaa $x \in L^{n+1}$ kahtia osiin x_1 ja x_2 ja tarkistaa, että $x_1 \in L^n$ ja $x_2 \in L$. Saadaan

$$L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i \in \mathbf{NP}.$$

7. Väite: Olkoon $G = (V, E)$ suuntaamaton verkko ja $V' \subseteq V$. Seuraavat kolme ehtoa ovat ekvivalentit:

   1. V' on G:n solmupeite,
   2. $V \setminus V'$ on riippumaton solmujoukko G:ssä ja
   3. $V \setminus V'$ on klikki G:n komplementtiverkossa $\overline{G} = (V, (V \times V) \setminus E)$.

   Todistus:
   $(1 \implies 2)$:
   Olkoon V' solmupeite. Tehdään vastaoletus, että $V \setminus V'$ ei ole riippumaton solmujoukko. Siksi on olemassa jotkin sellaiset $a, b \in V \setminus V'$, että $(a, b) \in E$. Koska nyt $a, b \notin V'$, ei V' voi olla solmupeite. Ristiriidasta seuraa, että $V \setminus V'$ on riippumaton osajoukko.

   $(2 \implies 3)$:
   Olkoon $V \setminus V'$ riippumaton osajoukko ja $a, b \in V \setminus V'$. Koska $(a, b) \notin E$, niin $(a, b) \in (V \times V) \setminus E$. Tämä tarkoittaa, että $V \setminus V'$ on klikki komplementtiverkossa.

   $(3 \implies 1)$:
   Olkoon $V \setminus V'$ on klikki komplementtiverkossa. Tehdään vastaoletus, että V' ei ole G:n solmupeite. Siten on olemassa sellaiset $a, b \in V \setminus V'$, joilla $(a, b) \in E$ ja $(a, b) \notin (V \times V) \setminus E$. Tällöin $V \setminus V'$ ei olekaan klikki. Väite seuraa ristiriidasta.

8. Olkoon $\mathrm{RJ} = \{(G, k) \mid$ suuntaamattomassa verkossa G on k:n solmun riippumaton joukko$\}$. Voidaan muodostaa sellainen polynomisessa ajassa toimiva verifioija, joka tutkii, ettei annetussa k:n solmun joukossa ole joukon sisäisiä särmiä. Siksi $\mathrm{RJ} \in \mathbf{NP}$.

   Muodostetaan nyt polynominen palautus $\mathrm{CLIQUE} \leq_{\mathbf{P}} \mathrm{RJ}$. Olkoon $G = (V, E)$ verkko. Jos verkossa G on solmujen $V' \subseteq V$ muodostama klikki, niin tehtävästä seitsemän nähdään, että komplementtiverkossa $\overline{G} = (V, (V \times V) \setminus E)$ on tällöin solmujen V' riippumaton joukko. Tämän perusteella voidaan muodostaa palautusfunktio $(G, k) \mapsto (\overline{G}, k)$. Edelleen tehtävästä seitsemän nähdään, että palautus toimii molempiin suuntiin. Siis

$$(G, k) \in \mathrm{CLIQUE} \iff (\overline{G}, k) \in \mathrm{RJ}.$$

   Palautusfunktio voidaan selvästi suorittaa polynomisessa ajassa. Siis $\mathrm{CLIQUE} \leq_{\mathbf{P}} \mathrm{RJ}$ ja RJ on $\mathbf{NP}$-täydellinen.

Seuraavaksi tehdään palautus solmupeiteongelmasta SP riippumattomaan joukkoon. Jos verkossa $G = (V, E)$ on solmujen $V' \subseteq V$ solmupeite, niin G:ssä on solmujen $V \setminus V'$ riippumaton joukko. Palautusfunktio on siten $(G, k) \mapsto (G, |V| - k)$ ja

$$(G, k) \in \mathrm{SP} \iff (G, |V| - k) \in \mathrm{RJ}.$$