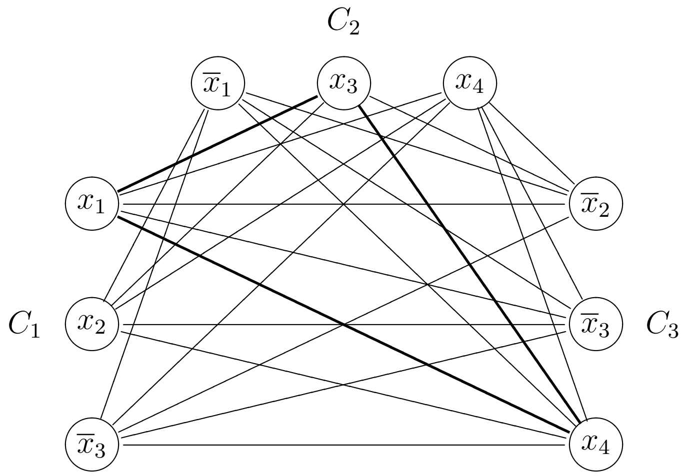
Laskennan vaativuus **Ratkaisuehdotuksia**
Harjoitus 4, 20.4.2007

Tehtävissä käytettävä 3SAT-kaava on

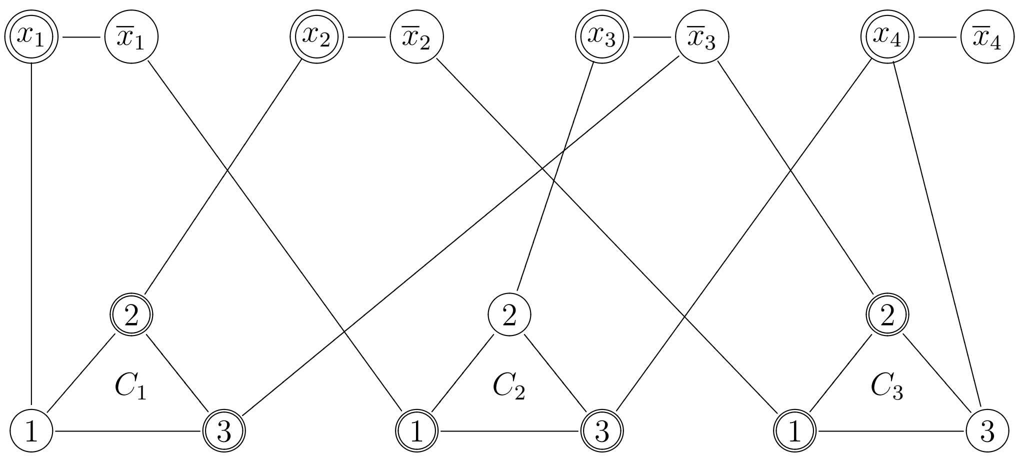
$$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4).$$

1. Alla oleva verkko saadaan sovellettaessa 3SAT:n palautusta klikkiongelmaan.



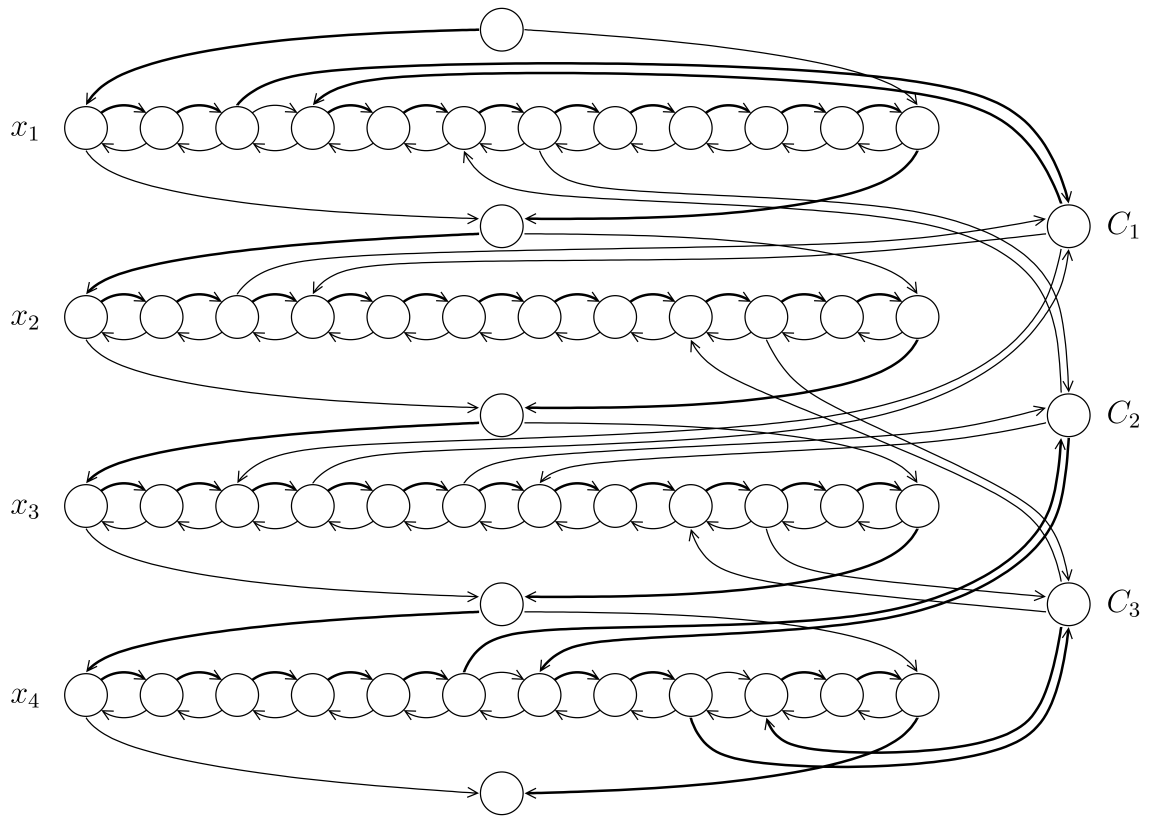
Verkosta löytyy useita 3-klikkejä. Esimerkiksi solmuista C_1^1, C_2^2 ja C_3^3 saadaan lihavoiduilla viivoilla esitetty 3-klikki.

2. Kuva esittää 3SAT:n palautuksessa solmupeiteongelmaan syntyvää verkkoa.



Konstruktio lupaa meille $n + 2m$ solmun solmupeitettä, missä n on muuttujien määrä ja m on konjunktion alikaavojen lukumäärä. Tässä tapauksessa saadaan siis $4+2\cdot 3 = 10$ solmun solmupeite. Arvoasetuksella $(1/x_1, 1/x_2, 1/x_3, 1/x_4)$ ja luentojen neuvomalla tavalla valitaan 10 solmun joukko, jota merkitään kuvassa kaksinkertaisilla ympyröillä. Kuvasta on helppo huomata, että kyseessä on tosiaan solmupeite.

3. Kuvassa on annetulle kaavalle muodostettu palautus Hamiltonin polku -ongelmaan. Lihavoituna on lisäksi yksi kulku tässä verkossa.



4. **Yhdiste:**

   Olkoot A ja B luokan **PSPACE** kieliä ja M_A ja M_B Turingin koneet näille kielille. Voimme muodostaa kolminauhaisen Turingin koneen $M_{A\cup B}$, joka kopioi syötenauhan sisällön toiselle nauhalle muodostaen samalla koneen M_A konfiguraation alkutilassa. Kolmatta nauhaa käytetään työnauhana. Kone simuloi M_A:ta konfiguraatio- ja työnauhoilla. Jos suoritus päättyy hyväksyvästi, $M_{A\cup B}$ hyväksyy. Muuten muodostetaan koneen M_B konfiguraatio alkutilassa annetulla syötteellä ja palautetaan tämän simulaation tulos. Tarvitsemme lisätilaa polynomisen määrän ja koneet M_A ja M_B toimivat polynomisessa tilassa, joten $A \cup B \in$ **PSPACE**.

   Komplementti:

   Olkoon $A \in$ **PSPACE** ja M_A kielen A tunnistava kone. Voidaan muodostaa sellainen kone $M_{\overline{A}}$, joka toimii kuten M_A, mutta M_A:n hyväksyvää tilaa vastaavaan tilaan tullessaan se hylkää syötteen. Vastaavasti M_A:n hylkäävää tilaa vastaavaan tilaan tullessaan $M_{\overline{A}}$ hyväksyy syötteen. Kone $M_{\overline{A}}$ toimii samanlaisella tilavaativuudella kuin M_A, joten $\overline{A} \in$ **PSPACE**.

   Sulkeuma:

   Todistetaan sulkeumakielen kuuluvuus **PSPACE**:en induktiolla. Olkoon $L \in$ **PSPACE** kieli ja M_L sen tunnistava kone. Vain tyhjän syötteen hyväksyvä kone toimii vakiotilassa, joten $L^0 \in$ **PSPACE**. Samoin $L^1 = L \in$ **PSPACE**.

   Oletetaan nyt, että $L^n \in$ **PSPACE** ja M_{L^n} on sen tunnistava kone. Voimme muodostaa kielen L^{n+1} tunnistavan epädeterministisen Turingin koneen $M_{L^{n+1}}$, joka jakaa syötteen x epädeterministisesti kahtia osiin x_1 ja x_2. Seuraavaksi se simuloi konetta

M_{L^n} syötteellä x_1. Sen onnistuessa simuloidaan konetta M_L syötteellä x_2. Jos molemmat koneet hyväksyvät syötteensä, $M_{L^{n+1}}$ hyväksyy syötteen x. Muuten syöte x hylätään. Koneet M_L ja M_{L^n} toimivat polynomisessa tilassa ja $M_{L^{n+1}}$ tarvitsee lisätilaa vain polynomisen verran suhteessa syötteeseensä. Siksi $L^{n+1} \in \mathbf{NPSPACE}$. Savitchin lausen perusteella $L^{n+1} \in \mathbf{PSPACE}$.

Induktiotodistuksesta seuraa

$$L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i \in \mathbf{PSPACE}.$$

5. Kieli A sisältää oikeanmuotoisia sulkumerkkipareja. Voimme muodostaa sellaisen kaksinauhaisen Turingin koneen, joka ei muuta syötenauhaa ja ylläpitää toisella nauhalla binäärimuotoista laskuria. Laskuri on alustettu nollaksi. Kone käy läpi syötenauhan merkki kerrallaan alusta loppuun. Jos syötenauhan lukupään kohdalla oleva merkki on '(', lisätään laskuria yhdellä. Jos merkki on ')', tarkistetaan ensin, onko laskuri nolla. Jos laskuri on nolla, hylätään syöte. Muuten laskurin arvoa vähennetään yhdellä. Jos nauhalla on jokin muu merkki kuin sulkumerkki tai nauhan loppumerkki, hylätään syöte. Jos suorituksen päätteeksi laskurin arvo on nolla, syöte hyväksytään, muuten hylätään.

   Kone tarvitsee lisätilaa vain laskurin ylläpitämiseksi. Maksimiarvo laskurille voi olla syötteen x pituus, joka voidaan tallettaa binäärimuodossa tilaan $\max\{1, \lceil \log_2(|x| + 1) \rceil\}$. Siksi tilavaativuus on $\mathcal{O}(\log(|x|))$ ja $A \in \mathbf{L}$.