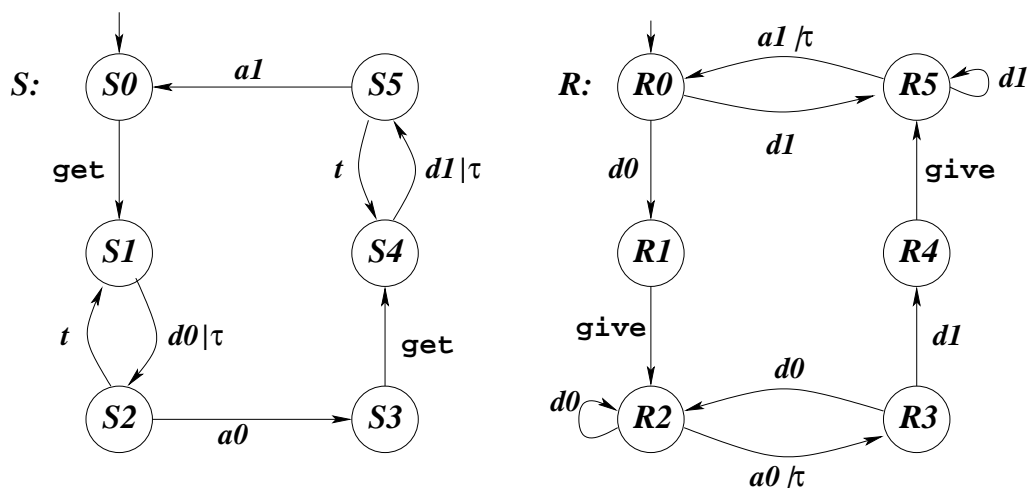


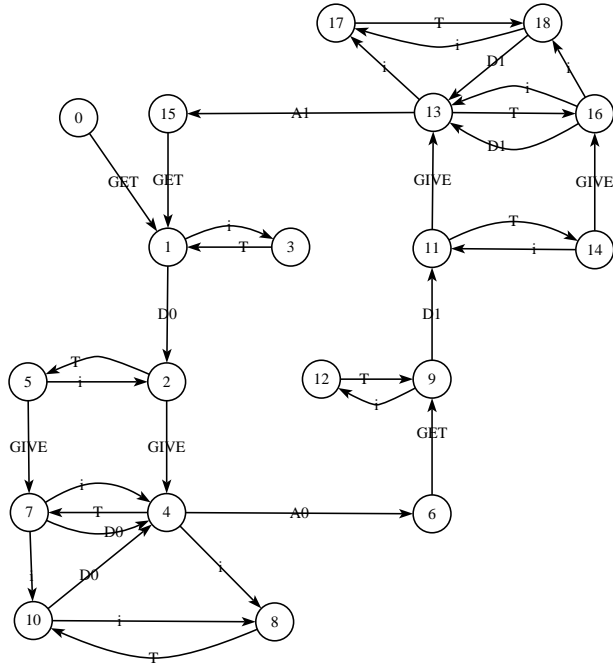
# Spesifioinnin ja verifoinnin perusteet

## Harjoitus 4, 8.2.2008

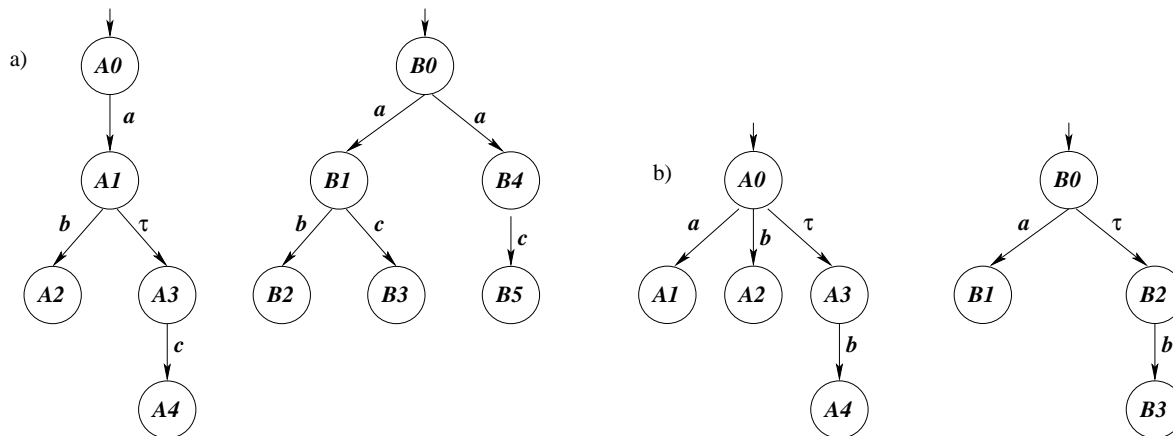
1. Muodosta AB-protokollan toimintaa kuvaava yhteistilaverkko  $S[[d0, d1, a0, a1]]R$ , kun S ja R ovat seuraavat siirtymäsystemit:



Siirtymäsysteemi on generoitu Aldebaranin avulla ja siinä on yksi ylimääräinen tila eli voi poistaa tilan 0 ja tehdä tilasta 15 alkutilan.



2. Tutki seuraavien siirtymäsystemiparien kohdalla, ovatko ne suoritusjälkiekvivalentit? Perustelee.



- (a) Merkitään A:lla prosessia, jonka alkutila on  $A0$  ja B:llä prosessia, jonka alkutila on  $B0$ . Koska A:n kaikkien suoritusjälkien joukko  $tr(A)$  on sama kuin B:n kaikkien suoritusjälkien joukko  $tr(B) = \{a, ab, ac\}$  ovat prosessit  $A$  ja  $B$  suoritusjälkiekvivalentit.
- (b) Merkitään A:lla prosessia, jonka alkutila on  $A0$  ja B:llä prosessia, jonka alkutila on  $B0$ . Koska A:n kaikkien suoritusjälkien joukko  $tr(A)$  on sama kuin B:n kaikkien suoritusjälkien joukko  $tr(B) = \{a, b\}$  ovat prosessit  $A$  ja  $B$  suoritusjälkiekvivalentit.
3. Tutki tehtävän 2 siirtymäsystemiparien kohdalla, ovatko ne heikosti bisimilaariset? Jos ovat, niin anna heikko bisimulaatiorelaatio ja perustelut. Jos siirtymäsystemit eivät ole heikosti bisimilaariset, perustelee miksi näin on.

- (a) Siirtymäsystemit eivät ole heikosti bisimilaarisia. Jos nimittäin nyt yritetään muodostaa heikko bisimulaatiorelaatio  $\mathcal{S}$ , niin parin  $(A0, B0)$  täytyy kuulua relaatioon. Käytetään seuraavaksi määritelmän ehtoa 2:  $A0 \xrightarrow{a} A1$ . Ainoa tapa simuloida tätä B:n osalta on  $B0 \xrightarrow{a} B1$ . B0:sta on kyllä myös siirtymä tapahtumalla  $a$  tilaan  $B4$ , mutta tämä siirtymä ei tule kyseeseen, koska  $B4$ :stä on vain siirtymä tapahtumalla  $c$  kun taas sekä  $A1$ :stä että  $B1$ :stä on heikot siirtymät tapahtumalla  $b$  ja  $c$ . Täten parin  $(A1, B1)$  täytyy kuulua myös relaatioon  $\mathcal{S}$ . Käytetään tämän jälkeen pariin  $(A1, B1)$  määritelmän ehtoa 2:  $A1 \xrightarrow{\varepsilon} A3$ . Ainoa tapa simuloida tätä B:n osalta on, että  $B$  pysyy tilassa  $B1$ . (Huom! Aina on siis olemassa  $\varepsilon$ -siirtymä tilaan itseensä eli  $B1 \xrightarrow{\varepsilon} B1$ .) Täten parin  $(A3, B1)$  täytyy kuulua myös relaatioon  $\mathcal{S}$ . Käytetään tämän jälkeen pariin  $(A3, B1)$  määritelmän ehtoa 3:  $B$  siirtyy  $B1$ :stä  $b$ :llä  $B2$ :een eli  $B1 \xrightarrow{b} B2$ . Nytpä  $A$  ei voikaan simuloida tätä siirtymää, sillä  $A3$ :sta ei lähde

yhtään heikkoa  $b$ -siirtymää. Siis heikkoa bisimulaatiorelaatiota ei voi olla olemassa  $A$ :n ja  $B$ :n välillä, joten prosessit eivät ole heikosti bisimilaariset.

- (b) Siirtymäsystemit ovat heikosti bisimilaariset, sillä  $\mathcal{S} = \{(A0, B0), (A1, B1), (A2, B3), (A3, B2), (A4, B3)\}$  on heikko bisimulaatio ja  $(A0, B0) \in \mathcal{S}$ .

Koska  $(A_0, B_0) \in \mathcal{S}$ , niin ehto 1 on voimassa.

Tarkistetaan seuraavaksi ehdot 2 ja 3 kullekin relaation  $\mathcal{S}$  alkioille ja toiminoille  $a \in (A \setminus \{\tau\}) \cup \{\varepsilon\}$

Jos

- i.  $(A_0, B_0) \in \mathcal{S}$  ja

- $A_0 \xrightarrow{a} A_1$ . Tällöin on olemassa  $B_1$ , jolla  $B_0 \xrightarrow{a} B_1$  ja  $(A_1, B_1) \in \mathcal{S}$
- $B_0 \xrightarrow{a} B_1$ . Tällöin on olemassa  $A_1$ , jolla  $A_0 \xrightarrow{a} A_1$  ja  $(A_1, B_1) \in \mathcal{S}$
- $A_0 \xrightarrow{b} A_2$ . Tällöin on olemassa  $B_3$ , jolla  $B_0 \xrightarrow{b} B_3$  ja  $(A_2, B_3) \in \mathcal{S}$
- $A_0 \xrightarrow{b} A_4$ . Tällöin on olemassa  $B_3$ , jolla  $B_0 \xrightarrow{b} B_3$  ja  $(A_4, B_3) \in \mathcal{S}$
- $B_0 \xrightarrow{b} B_3$ . Tällöin on olemassa  $A_2$ , jolla  $A_0 \xrightarrow{b} A_2$  ja  $(A_2, B_3) \in \mathcal{S}$
- $A_0 \xrightarrow{\varepsilon} A_0$ . Tällöin on olemassa  $B_0$ , jolla  $B_0 \xrightarrow{\varepsilon} B_0$  ja  $(A_0, B_0) \in \mathcal{S}$
- $A_0 \xrightarrow{\varepsilon} A_3$ . Tällöin on olemassa  $B_2$ , jolla  $B_0 \xrightarrow{\varepsilon} B_2$  ja  $(A_3, B_2) \in \mathcal{S}$
- $B_0 \xrightarrow{\varepsilon} B_0$ . Tällöin on olemassa  $A_0$ , jolla  $A_0 \xrightarrow{\varepsilon} A_0$  ja  $(A_0, B_0) \in \mathcal{S}$
- $B_0 \xrightarrow{\varepsilon} B_2$ . Tällöin on olemassa  $A_3$ , jolla  $A_0 \xrightarrow{\varepsilon} A_3$  ja  $(A_3, B_2) \in \mathcal{S}$

- ii.  $(A_1, B_1) \in \mathcal{S}$  ja

- $A_1 \xrightarrow{\varepsilon} A_1$ . Tällöin on olemassa  $B_1$ , jolla  $B_1 \xrightarrow{\varepsilon} B_1$  ja  $(A_1, B_1) \in \mathcal{S}$
- $B_1 \xrightarrow{\varepsilon} B_1$ . Tällöin on olemassa  $A_1$ , jolla  $A_1 \xrightarrow{\varepsilon} A_1$  ja  $(A_1, B_1) \in \mathcal{S}$

- iii.  $(A_2, B_3) \in \mathcal{S}$  ja

- $A_2 \xrightarrow{\varepsilon} A_2$ . Tällöin on olemassa  $B_3$ , jolla  $B_3 \xrightarrow{\varepsilon} B_3$  ja  $(A_2, B_3) \in \mathcal{S}$
- $B_3 \xrightarrow{\varepsilon} B_3$ . Tällöin on olemassa  $A_2$ , jolla  $A_2 \xrightarrow{\varepsilon} A_2$  ja  $(A_2, B_3) \in \mathcal{S}$

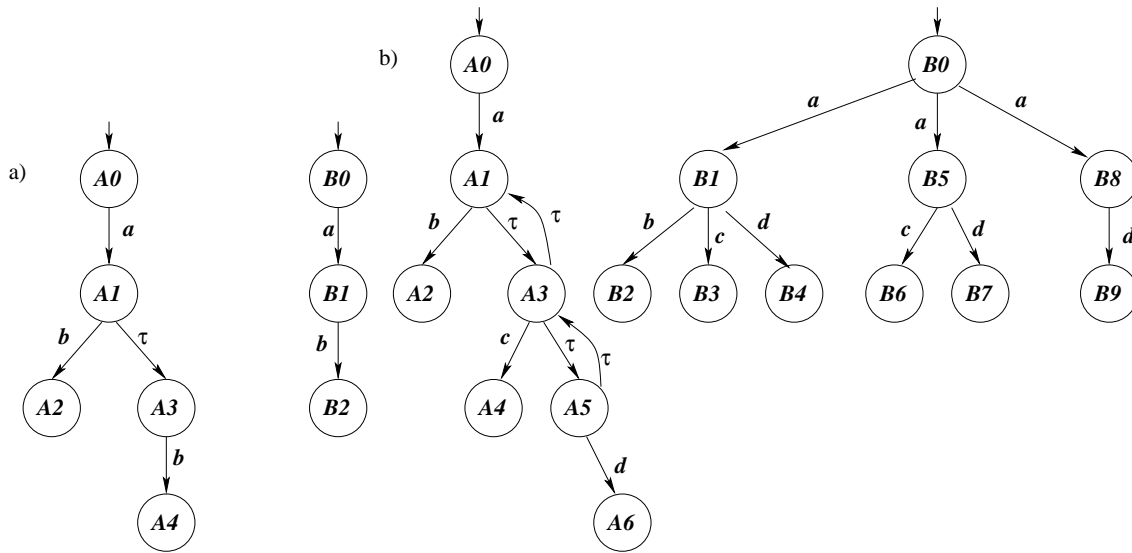
- iv.  $(A_3, B_2) \in \mathcal{S}$  ja

- $A_3 \xrightarrow{b} A_4$ . Tällöin on olemassa  $B_3$ , jolla  $B_2 \xrightarrow{b} B_3$  ja  $(A_4, B_3) \in \mathcal{S}$
- $B_2 \xrightarrow{b} B_3$ . Tällöin on olemassa  $A_4$ , jolla  $A_3 \xrightarrow{b} A_4$  ja  $(A_4, B_3) \in \mathcal{S}$
- $A_3 \xrightarrow{\varepsilon} A_3$ . Tällöin on olemassa  $B_2$ , jolla  $B_2 \xrightarrow{\varepsilon} B_2$  ja  $(A_3, B_2) \in \mathcal{S}$
- $B_2 \xrightarrow{\varepsilon} B_2$ . Tällöin on olemassa  $A_3$ , jolla  $A_3 \xrightarrow{\varepsilon} A_3$  ja  $(A_3, B_2) \in \mathcal{S}$

- v.  $(A_4, B_3) \in \mathcal{S}$  ja

- $A_4 \xrightarrow{\varepsilon} A_4$ . Tällöin on olemassa  $B_3$ , jolla  $B_3 \xrightarrow{\varepsilon} B_3$  ja  $(A_4, B_3) \in \mathcal{S}$
- $B_3 \xrightarrow{\varepsilon} B_3$ . Tällöin on olemassa  $A_4$ , jolla  $A_4 \xrightarrow{\varepsilon} A_4$  ja  $(A_4, B_3) \in \mathcal{S}$

4. Tutki seuraavien siirtymäsysteemiparien kohdalla, ovatko ne heikosti bisimilaariset? Jos ovat, niin anna heikko bisimulaatiorelaatio. Jos siirtymäsysteemit eivät ole heikosti bisimilaariset, perustele miksi näin on.



- (a) Siirtymäsysteemit ovat heikosti bisimilaariset, sillä  $\mathcal{S} = \{(A0, B0), (A1, B1), (A2, B2), (A3, B1), (A4, B2)\}$  on heikko bisimulaatio ja  $(A0, B0) \in \mathcal{S}$ .
- (b) Siirtymäsysteemit eivät ole heikosti bisimilaarisia.

Jos nimittäin nyt yritetään muodostaa heikko bisimulaatiorelaatio  $\mathcal{S}$ , niin parin  $(A0, B0)$  täytyy kuulua relaatioon. Käytetään seuraavaksi määritelmän ehtoa 3:  $B0 \xrightarrow{a} B8$ . On kolme tapa simuloida tätä  $A$ :n osalta:  $A0 \xrightarrow{a} A1$ ,  $A0 \xrightarrow{a} A3$ ,  $A0 \xrightarrow{a} A5$ . Täten jonkun pareista  $(A1, B8)$ ,  $(A3, B8)$  ja  $(A5, B8)$  on kuuluttava myös relaatioon  $\mathcal{S}$ . Tutkitaan kaikki vaihtoehdot:

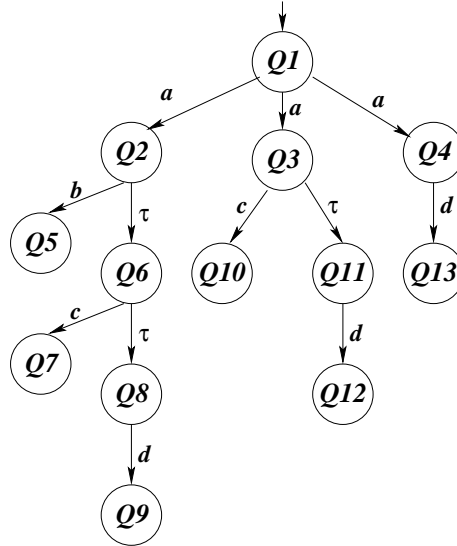
- i.  $(A1, B8) \in \mathcal{S}$   
Käytetään pariin  $(A1, B8)$  määritelmän ehtoa 2:  $A1 \xrightarrow{b} A2$ . Nyt  $B$  ei voi simuloida tätä siirtymää, sillä  $B8$ :sta ei lähde yhtään heikkoa  $b$ -siirtymää. Täten  $(A1, B8)$  ei voi kuulua relaatioon  $\mathcal{S}$
- ii.  $(A3, B8) \in \mathcal{S}$   
Käytetään pariin  $(A3, B8)$  määritelmän ehtoa 2:  $A3 \xrightarrow{b} A2$ . Nyt  $B$  ei voi simuloida tätä siirtymää, sillä  $B8$ :sta ei lähde yhtään heikkoa  $b$ -siirtymää. Täten  $(A3, B8)$  ei voi kuulua relaatioon  $\mathcal{S}$
- iii.  $(A5, B8) \in \mathcal{S}$   
Käytetään pariin  $(A5, B8)$  määritelmän ehtoa 2:  $A5 \xrightarrow{b} A2$ . Nyt  $B$  ei voi simuloida tätä siirtymää, sillä  $B8$ :sta ei lähde yhtään heikkoa  $b$ -siirtymää. Täten  $(A5, B8)$  ei voi kuulua relaatioon  $\mathcal{S}$

Mikään kolmesta parista  $(A1, B8)$ ,  $(A3, B8)$  ja  $(A5, B8)$  ei voinutkaan kuulua relaatioon  $\mathcal{S}$ . Täten heikkoa bisimulaatiorelaatiota ei voi olla olemassa  $A$ :n ja  $B$ :n välillä ja prosessit eivät ole heikosti bisimilaariset.

5. Monisteessa on esitetty algoritmi, joka laskee siirtymäsystemin ekvivalenssijoukot heikon bisimulaation suhteen.

Sovellettaessa algoritmia alla olevaan siirtymäsystemiin saadaan osituksiksi  $\rho = \{\{Q1\}, \{Q2\}, \{Q3, Q6\}, \{Q4, Q8, Q11\}, \{Q5, Q7, Q9, Q10, Q12, Q13\}\}$ .

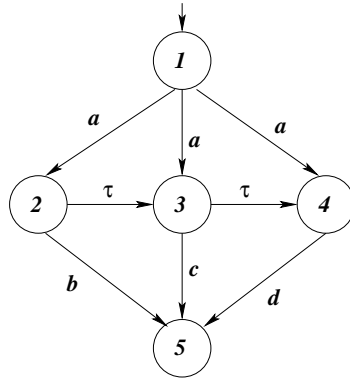
Piirrä minimaalinen siirtymäsystemi, joka on heikosti bisimilaarinen alkuperäisen siirtymäsystemin kanssa.



Miniprosessin tiloiksi tulevat osituksen ekvivalenssiluokat on nimetty kuvassa seuraavasti:  $\{Q1\} = 1$ ,  $\{Q2\} = 2$ ,  $\{Q3, Q6\} = 3$ ,  $\{Q4, Q8, Q11\} = 4$ ,  $\{Q5, Q7, Q9, Q10, Q12, Q13\} = 5$ .

Ekvivalenssiluokasta on siirtymä  $a$ :lla johonkin toiseen ekvivalenssiluokkaan, jos ensimmäiseksi mainitun luokan jostain tilasta on siirtymä  $a$ :lla toisen luokan johonkin tilaan alkuperäisessä siirtymäsystemissä.

Minimiprosessiksi saadaan:



6. Miten minimiprosessin muodostusalgoritmia voidaan käyttää vertailun: onko  $P \approx_{wbis} Q$  suorittamiseen? Sovella menetelmää tehtävän 2 kohdan a) prosesseihin ja simuloi tilojen ekvivalenssiluokat laskevan algoritmin toimintaa.

Algoritmia voidaan käyttää myös kahden erillisen prosessin  $P$  ja  $Q$  ekvivalenssiver-tailuun. Nimittäin muodostetaan yksi prosessi ottamalla käyttöön uusi alkutila, josta vedetään  $\tau$ -siirtymät  $P$ :n ja  $Q$ :n alkutiloihin. Sen jälkeen lasketaan, ovatko tässä prosessissa tilat  $P$  ja  $Q$  ekvivalentteja. Jos ovat, tietenkin myös vastaavat prosessit ovat ekvivalentteja ja päinvastoin.

Muodostetaan yksi prosessi ottamalla käyttöön alkutila 1 ja vedetään sieltä  $\tau$ -siirtymät tiloihin  $A0$  ja  $B0$ .

Alussa  $\rho = \{\{1, A0, A1, A2, A3, A4, B0, B1, B2, B3, B4, B5\}\}$ ,  
 $W = \{\{1, A0, A1, A2, A3, A4, B0, B1, B2, B3, B4, B5\}\}$ . Sitten

$$\begin{aligned}
 B &= \{1, A0, A1, A2, A3, A4, B0, B1, B2, B3, B4, B5\} \\
 T_a^{-1}[B] &= \{1, A0, B0\} \\
 I_{a,B} &= \{\{1, A0, A1, A2, A3, A4, B0, B1, B2, B3, B4, B5\}\} \\
 I_{a,B}^{1,2} &= \{\{1, A0, B0\}, \{A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, B4, B5\}\} \\
 \rho &= \{\{1, A0, B0\}, \{A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, B4, B5\}\} \\
 W &= \{\{1, A0, B0\}, \{A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, B4, B5\}\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_b^{-1}[B] &= \{A1, B1\} \\
 I_{b,B} &= \{\{A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, B4, B5\}\} \\
 I_{b,B}^{1,2} &= \{\{A1, B1\}, \{A2, A3, A4, B2, B3, B4, B5\}\} \\
 \rho &= \{\{1, A0, B0\}, \{A1, B1\}, \{A2, A3, A4, B2, B3, B4, B5\}\} \\
 W &= \textit{sama kuin } \rho
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
T_c^{-1}[B] &= \{A1, A3, B1, B4\} \\
I_{c,B} &= \{\{A2, A3, A4, B2, B3, B4, B5\}\} \\
I_{c,B}^{1,2} &= \{\{A3, B4\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\} \\
\rho &= \{\{1, A0, B0\}, \{A1, B1\}, \{A3, B4\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\} \\
W &= \textit{sama kuin } \rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon^{-1}[B] &= \{1, A0, A1, A2, A3, A4, B0, B1, B2, B3, B4, B5\} \\
I_{\varepsilon,B} &= \emptyset \\
I_{\varepsilon,B}^{1,2} &= \emptyset \\
\rho &= \textit{sama kuin aiemmin} \\
W &= \textit{sama kuin aiemmin}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \{A3, B4\} \\
W &= \{\{1, A0, B0\}, \{A1, B1\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_a^{-1}[B] &= \{1, A0, B0\} \\
I_{a,B} &= \emptyset, \textit{eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_b^{-1}[B] &= \emptyset \\
I_{b,B} &= \emptyset, \textit{eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_c^{-1}[B] &= \emptyset \\
I_{c,B} &= \emptyset, \textit{eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon^{-1}[B] &= \{A1, A3, B4\} \\
I_{\varepsilon,B} &= \{\{A1, B1\}\} \\
I_{\varepsilon,B}^{1,2} &= \{\{A1\}, \{B1\}\} \\
\rho &= \{\{1, A0, B0\}, \{A1\}, \{B1\}, \{A3, B4\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\} \\
W &= \{\{1, A0, B0\}, \{A1\}, \{B1\}, \{A3, B4\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \{A1\} \\
W &= \{\{1, A0, B0\}, \{B1\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}
\end{aligned}$$

$$T_a^{-1}[B] = \{1, A0\}$$

$$\begin{aligned}
I_{a,B} &= \{\{1, A0, B0\}\} \\
I_{a,B}^{1,2} &= \{\{1, A0\}, \{B0\}\} \\
\rho &= \{\{1, A0\}, \{B0\}, \{A1\}, \{B1\}, \{A3, B4\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\} \\
W &= \{\{1, A0\}, \{B0\}, \{B1\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_b^{-1}[B] &= \emptyset \\
I_{b,B} &= \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_c^{-1}[B] &= \emptyset \\
I_{c,B} &= \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon^{-1}[B] &= \{A1\} \\
I_{\varepsilon,B} &= \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \{B0\} \\
W &= \{\{1, A0\}, \{B1\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_a^{-1}[B] &= \emptyset \\
I_{a,B} &= \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_b^{-1}[B] &= \emptyset \\
I_{b,B} &= \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_c^{-1}[B] &= \emptyset \\
I_{c,B} &= \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_\varepsilon^{-1}[B] &= \{1, A0\} \\
I_{\varepsilon,B} &= \{\{1\}, \{A0\}\} \\
\rho &= \{\{1\}, \{A0\}, \{B0\}, \{A1\}, \{B1\}, \{A3, B4\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\} \\
W &= \{\{1\}, \{A0\}, \{B1\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \{1\} \\
W &= \{\{A0\}, \{B1\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}
\end{aligned}$$

$$T_a^{-1}[B] = \emptyset$$

$$I_{a,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_b^{-1}[B] = \emptyset$$

$$I_{b,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_c^{-1}[B] = \emptyset$$

$$I_{c,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_\varepsilon^{-1}[B] = \{1\}$$

$$I_{\varepsilon,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$B = \{A0\}$$

$$W = \{\{B1\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}$$

$$T_a^{-1}[B] = \emptyset$$

$$I_{a,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_b^{-1}[B] = \emptyset$$

$$I_{b,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_c^{-1}[B] = \emptyset$$

$$I_{c,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_\varepsilon^{-1}[B] = \{1, A0\}$$

$$I_{\varepsilon,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$B = \{B1\}$$

$$W = \{\{A2, A4, B2, B3, B5\}\}$$

$$T_a^{-1}[B] = \{1, B0\}$$

$$I_{a,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_b^{-1}[B] = \emptyset$$

$$I_{b,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_c^{-1}[B] = \emptyset$$

$$I_{c,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_\varepsilon^{-1}[B] = \{B1\}$$

$$I_{\varepsilon,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$B = \{A2, A4, B2, B3, B5\}$$

$$W = \emptyset$$

$$T_a^{-1}[B] = \{1, B0\}$$

$$I_{a,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_b^{-1}[B] = \{A1, B1\}$$

$$I_{b,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_c^{-1}[B] = \{A1, A3, B1, B4\}$$

$$I_{c,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$T_\varepsilon^{-1}[B] = \{A2, A4, B2, B3, B5\}$$

$$I_{\varepsilon,B} = \emptyset, \text{ eli ei muutoksia}$$

$$\rho = \{\{1\}, \{A0\}, \{B0\}, \{A1\}, \{B1\}, \{A3, B4\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}$$

$$W = \emptyset$$

Ositukseksi jää siis  $\rho = \{\{1\}, \{A0\}, \{B0\}, \{A1\}, \{B1\}, \{A3, B4\}, \{A2, A4, B2, B3, B5\}\}$ . Koska  $A0$  ja  $B0$  eivät ole samassa ekvivalenssiluokassa, niin  $A$  (prosessi, jonka alkutila on  $A0$ ) ja  $B$  (prosessi, jonka alkutila on  $B0$ ) eivät ole heikosti bisimilaariset keskenään.