Tietorakenteet ja algoritmit (syksy 2012)

Laskuharjoitukset 12, 7.12.2012

1. Anna kurssipalautetta osoitteessa: https://ilmo.cs.helsinki.fi/kurssit/servlet/Valinta

Huom. Voit merkitä tämän tehtävän tehdyksi jos vannot (kautta kiven ja kannon), että annat palautetta viimeistään kurssikokeen jälkeen!

2. Union-find-rakennetta koskevilla kalvoilla, sivulla 578, todetaan, että, jos joukkoa kuvaavassa puussa on n solmua ja union-operaatiot on toteutettu kalvoilla kuvatulla tavalla, niin puun korkeus on $\mathcal{O}(\log n)$. Osoita tämä väite induktiota käyttämällä.

Seuraavat tehtävät ovat kevään 2012 toisesta kurssikokeesta:

3. [*4 pistettä*] Tarkastelemme maksimikekoa A taulukkomuodossa.

(a) Annettuna keko A (ylempi rivi on taulukon indeksit):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
16	10	14	7	8	9	3	2	4	1	$\cdots$

A.heap-size on 10. Näytä askel askeleelta mitä tapahtuu keon puunmuotoisessa esityksessä, kun suoritetaan operaatio heap-del-max(A). Anna myös lopullisen taulukon sisältö.

(b) Alkaen samasta keosta kuin tehtävässä a (eli ennen operaation heap-del-max suoritusta), näytä askel askeleelta mitä tapahtuu keon puunmuotoisesssa esityksessä, kun suoritetaan operaatio heap-insert(A,15). Anna myös lopullisen taulukon sisältö.

4. [*4 pistettä*] Seuraavassa esitetään kaksi väitettä. Kerro kustakin väitteestä onko se tosi vai epätosi ja anna siihen lyhyt (rivin tai kahden rivin pituinen) perustelu. Perusteluna riittää viitata kurssilla tunnettuihin tosiseikkoihin.

(a) Järjestämistä ei voi missään tilanteessa suorittaa nopeammin kuin ajassa $\Theta(n \log n)$, missä n on järjestettävän taulukon pituus.

(b) Jos verkko on täydellinen, eli kaikkien solmuparien välillä on olemassa kaari, niin syvyysuuntainen läpikäynti vie aikaa $\Theta(n^2)$, missä n on verkon solmujen lukumäärä.

Käännä!

5. [*6 pistettä*] Algoritmi saa syötteekseen kaksi taulukkoa A ja B, jotka sisältävät kokonaislukuja. Taulukossa A on m lukua ja taulukossa B on n lukua. Esitä tehokas algoritmi, joka tuottaa taulukon kaikista luvuista, jotka esiintyvät sekä taulukossa A, että taulukossa B. Esimerkiksi, jos taulukossa A on luvut 3, 5, 1, 8, 9, -22, 6, 8, 13, 14 ja taulukossa B on luvut 7, 8, 9, 4, 1, 4, 12, niin tuloksena on taulukko, jossa on seuraavat luvut jossakin järjestyksessä: 1, 8, 9.

Anna myös algoritmisi aikavaativuus perusteluineen.

Tässä tehtävässä ei kelpaa sellainen algoritmi, jonka aikavaativuus on $\Omega(mn)$, koska löytyy algoritmi, jolla on parempi aikavaativuus! Käytössäsi on luennoilla esitetyt algoritmit, eli sinun ei tarvitse kirjoittaa auki pseudokoodia esimerkiksi Kruskalin algoritmille, kunhan kerrot mitä algoritmia käytät.

6. [*8 pistettä*] Syötteenä on annettu suunnattu painottamaton verkko $G = (V, E)$. Lisäksi sen solmuista on nimetty erityinen lähtösolmu s ja maalisolmu t, ja jokaiseen kaareen on liitetty väri *punainen* tai *sininen*. Ongelmana on löytää solmusta s solmuun t lyhin polku, jonka kaarien värit vuorottelevat. Toisin sanoen, on löydettävä sellainen lyhin polku, että joka toinen kaari on punainen ja joka toinen kaari on sininen. Huomio: polun ensimmäinen kaari voi olla joko punainen tai sininen. Jos samanmittaisia vuorottelevia polkuja on useampia, riittää että algoritmi palauttaa jokin näistä. Algoritmisi tuottaa sekä polun pituuden, että tulostaa polun.

Esitä yksityiskohtainen ajassa $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ toimiva ratkaisualgoritmi.

Tässä tehtävässä taas **et** voi olettaa, että sinulla on valmiina käytössäsi luennoilla esitettyjä algoritmeja, vaan sinun pitää kirjoittaa auki pseudokoodi koko ratkaisulle.