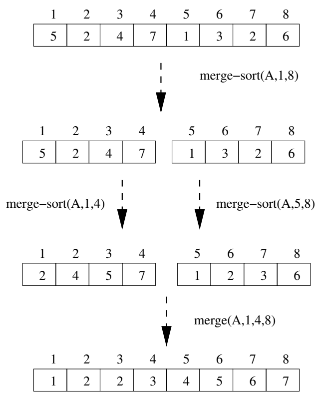
6.2 Lomitusjärjestäminen

- lomitusjärjestäminen perustuu *hajoita-ja-hallitse* (engl. divide-and-conquer) tekniikkaan:
  - *hajoitetaan* ongelma pienempiin osaongelmiin
  - *hallitaan*, eli ratkaistaan osaongelmat rekursiivisesti
  - *yhdistetään* osaratkaisut siten että saadaan ratkaisu koko ongelmalle
- taulukko A[1,n] järjestetään kutsumalla merge-sort(A,1,n):

```
merge-sort(A,p,r)
1  if p<r then
2      q ←⌊(p + r)/2⌋
3      merge-sort(A,p,q)
4      merge-sort(A,q+1,r)
5      merge(A,p,q,r)
```

- toimintaidea
  - operaation tehtävä on järjestää taulukon A osa A[p,q]
  - jos järjestettävän osan pituus on korkeintaan 1 (eli p ≥ q), ei tehdä mitään, sillä tällöin haluttu taulukon osa on valmiiksi järjestyksessä (rivin 1 if-ehto)
  - rivillä 2 asetetaan q käsiteltävän taulukon osan keskikohtaan
  - taulukon osat A[p,q] ja A[q+1,r] järjestetään kutsumalla niille merge-sort operaatiota rekursiivisesti
  - riville 5 tultaessa siis taulukon osat A[p,q] ja A[q+1,r] ovat järjestyksessä

  - rivillä 5 kutsutaan operaatiota merge joka "lomittaa" osaratkaisut siten että A[p,q] saadaan järjestykseen
- esimerkki:

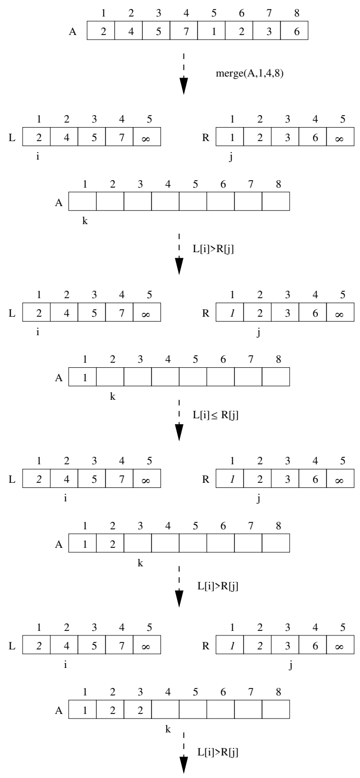


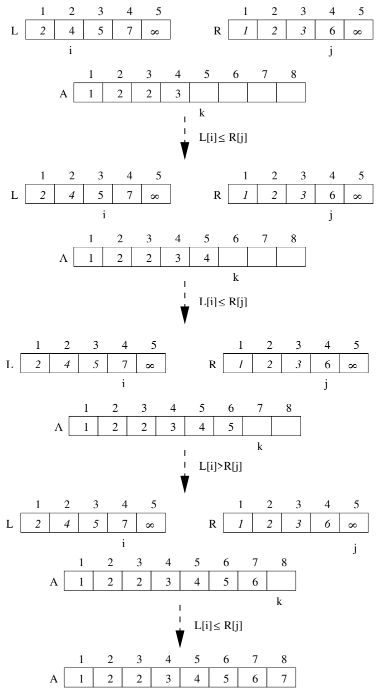
- järjestyksessä olevien taulukon osien A[p,q] ja A[q+1,r] lomittaminen järjestykseen on helppo tehdä:
  - kopioidaan A[p,q] aputaulukkoon L[1,n_1]
  - ja A[q+1,r] aputaulukkoon R[1,n_2]
  - laitetaan paikkaan A[p] pienin alkioista L[1] ja R[1],
  - jos L[1] laitettiin taulukkoon, niin paikkaan A[p+1] laitetaan pienin alkioista L[2] ja R[1]
    jos taas R[1] laitettiin taulukkoon, niin paikkaan A[p+1] laitetaan pienin alkioista L[1] ja R[2]

  - näin jatketaan kunnes kaikki aputaulukoiden alkiot on siirretty taulukkoon A
- algoritmina

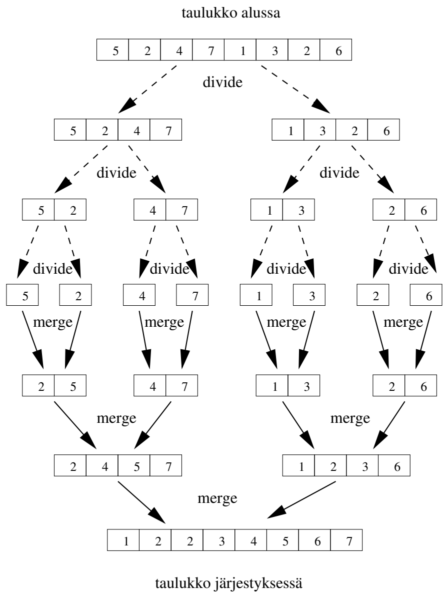
```
merge(A,p,q,r)
n1 ←q−p+1
n2 ←r−q
▷luodaan taulukot L[1,..., n1+1] ja R[1,...,n2+1]
for i ←1 to n1 do
    L[i] ←A[p+i−1]
L[n1+1] ←∞
for j ←1 to n2 do
    R[j] ←A[q+j]
R[n2+1] ←∞
i ←1
j ←1
for k ←p to r do
    if L[i] ≤ R[j] then
        A[k] ←L[i]
        i←i+1
    else
        A[k] ←R[j]
        j←j+1
```

- esimerkki merge-operaation toiminnasta:





- esimerkki koko algoritmin toiminnasta:



- ennen kuin analysoimme koko lomitusjärjestämisen aikavaativuutta, tarkastellaan mikä on merge-operaation vaativuus
  - olkoon n lomitettavan taulukonosan pituus
  - operaatio luo kaksi aputaulukko L:n ja R:n kooltaan yhteensä $n_1 + 1 + n_2 + 1 = n + 2 = \mathcal{O}(n)$
  - rivien 4 ja 7 for-lauseiden vaativuus yhteensä $\mathcal{O}(n_1 + n_2) = \mathcal{O}(n)$
  - rivin 12 for toistetaan n kertaa tehden toisto-osassa vakiomäärä operaatioita, myöhempi for-lause siis myös $\mathcal{O}(n)$
- merge-operaation aikavaativuus sekä tilavaativuus siis $\mathcal{O}(n)$, missä n lomitettavan taulukonosan pituus $r - p + 1$

- entä koko lomitusjärjestämisen aikavaativuus?
- tehdään yksinkertaistava oletus: järjestettävän taulukon koko on jokin kahden potenssi, jokainen jako siis puolittaa taulukon kahteen yhtäsuureen osaan
- Käytetään k:n kokoisen taulukon lomitusjärjestämisen vaativuudesta merkintää $T(k)$
- k:n kokoisen taulukon lomitusjärjestämisen vaativuus on nyt sama kuin kahden $k/2$ kokoisen taulukon järjestämisen vaativuus + taulukon osien lomittaminen
- yhden kokoisen taulukon lomitusjärjestämiseksi ei tarvitse tehdä mitään
- eli, voimme määritellä T:n *rekursioyhtälönä*:

$$\begin{aligned} T(1) &= \mathcal{O}(1) \\ T(k) &= T(k/2) + T(k/2) + \mathcal{O}(k), \quad \text{kun } k > 1 \end{aligned}$$

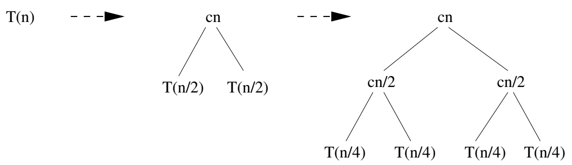
- Taulukon A[1,n] lomitusjärjestämisen aikavaativuus saadaan selville ratkaisemalla rekursioyhtälö $T(n)$
- kirjoitetaan rekursioyhtälö hieman toisin, käyttämättä $\mathcal{O}$-termejä

$$\begin{aligned} T(1) &= c \\ T(k) &= T(k/2) + T(k/2) + ck, \quad \text{kun } k > 1 \end{aligned}$$

- missä c on vakio
- aletaan laskemaan auki rekursioyhtälöä:

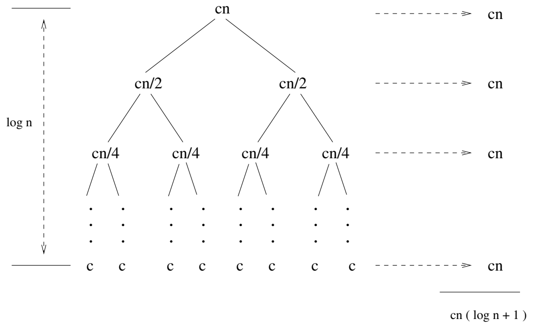
$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/2) + T(n/2) + cn \\ &= T(n/4) + T(n/4) + cn/2 + T(n/4) + T(n/4) + c/2 + cn \\ &\quad \ldots \end{aligned}$$

- havainnollisempaa on muodostaa *rekursio-puu*:



- merkataan rekursiopuun solmuihin kyseisen rekursio-instanssin vaativuus

- jatketaan rekursiopuun aukipiirtämistä niin kauan että tullaan yhden kokoisen taulukon järjestämistä vastaaviin lehtisolmuihin



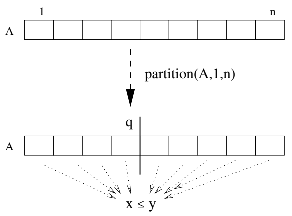
- huomaamme että rekursio-puun jokaisen tason vaativuus on cn
- rekursio-puu on täydellinen binääripuu jolla n lehteä, sivulla 49 todistetusta Lauseesta 1 seuraa nyt suoraan että rekursiopuun korkeus on $log\ n$ eli puulla on $log\ n + 1$ tasoa
- lomitusjärjestämisen vaativuus saadaan siis laskemalla yhteen kaikkien rekursiotasojen vaativuus, joka on $cn(log\ n + 1)$, eli
- lomitusjärjestämisen aikavaativuus $\mathcal{O}(n\ log\ n)$
- algoritmi voidaan toteuttaa myös ilman rekursiota, tällöin tilavaativuus on $\mathcal{O}(n)$, sama kuin ylimmän tason merge-operaatiolla

6.3 Pikajärjestäminen

- sovelletaan edelleen hajoita-ja-hallitse -periaatetta
- taulukko A[1,n] järjestetään kutsumalla quick-sort(A,1,n):

```
quick-sort(A,p,r)
1  if p<r then
2      q ←partition(A,p,r)
3      quick-sort(A,p,q)
4      quick-sort(A,q+1,r)
```

- toimintaidea
  - operaation tehtävä on järjestää taulukon A osa A[p,q]
  - jos järjestettävän osan pituus on korkeintaan 1 (eli p ≥ q), ei tehdä mitään, sillä tällöin haluttu taulukon osa on valmiiksi järjestyksessä (rivin 1 if-ehto)
  - rivillä 2 kutsutaan partition-operaatiota joka jakaa taulukon kahteen osaan:



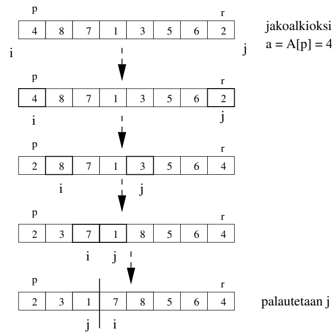
  - jaon jälkeen kaikki alkuosan A[p,q] alkiot ovat *korkeintaan yhtä suuria* kuin loppuosan A[q+1,r] alkiot

  - huom: toisin kuin lomitusjärjestämisessä, taulukon osat A[p,q] ja A[q+1,r] eivät ole välttämättä saman kokoisia!
  - taulukon osat A[p,q] ja A[q+1,r] järjestetään kutsumalla niille rekursiivisesti quick-sort operaatiota
  - tulosten kokoamisvaihetta ei tarvita, sillä alkuosan ja loppuosan alkiot ovat jo partition-operaation jäljiltä keskenään oikeassa järjestyksessä
- pikajärjestämisen tehokkuuden kannalta on oleellista että partition-operaatio toimii nopeasti (lineaarisessa ajassa jaettavaan taulukon-osan koon suhteen) ja tuottaa mahdollisimman tasaisia jakoja
- käytetään seuraavaa partition-operaatiota

```
partition(A,p,r)
1  a ←A[p]
2  i ←p-1
3  j ←r+1
4  while true do
5     repeat i ←i+1 until A[i] ≥ a
6     repeat j ←j−1 until A[j]≤ a
7     if i<j then vaihda A[i] ja A[j]
8        else return j
```

- toimintaidea
  - valitaan alussa *jakoalkioksi* vasemmanpuoleisimman alkion A[p] arvo a
  - ideana on nyt että jaon jälkeen kaikki vasemman puolen alkiot ovat suuruudeltaan korkeintaan a ja oikean puolen alkiot ovat suuruudeltaan vähintään a

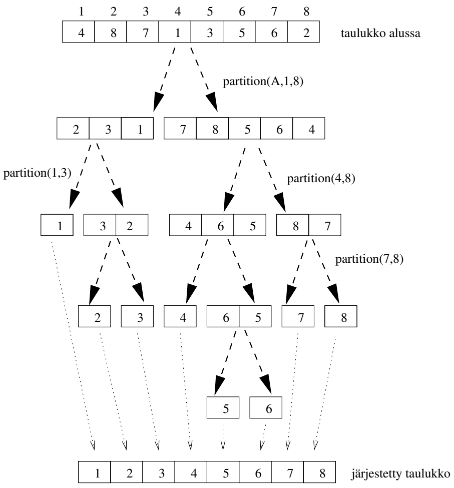
  - lähdetään kulkemaan taulukkoa kummastakin päästä läpi, indeksi i alusta loppuun ja indeksi j lopusta alkuun
  - rivillä 5 viedään i osoittamaan alustapäin ensimmäistä alkiota jonka arvo on suurempi tai yhtä suuri kuin jakoalkio A[i]≥ a
  - rivillä 6 viedään j osoittamaan lopustapäin ensimmäistä alkiota jonka arvo on korkeintaan jakoalkio A[j]≤a
  - jos indeksi i on vielä indeksin j vasemmalla puolella, vaihdetaan alkioiden A[i] ja A[j] arvot
  - jos $i \geq j$, on tilanne se että kaikki j:n oikealla puolella olevat taulukon alkiot ovat vähintään a:n suuruisia ja j:n vasemmalla puolella olevat taas korkeintaan a:n suuruisia, eli voimme lopettaa ja palautetaan j, sillä se osoittaa oikeaa jakokohtaa
- esimerkki partition-operaation toiminnasta:



- selvästi partition-operaation aikavaativuus $\mathcal{O}(n)$ suhteessa käsiteltävän taulukon pituuteen n, aputilaa ei tarvita kuin parin muuttujan verran eli tilavaativuus $\mathcal{O}(1)$
- esimerkissämme meillä oli melko hyvä tuuri, taulukko jakautui kohtuullisen tasan kahtia, entä jos kyseessä olisi ollut seuraava taulukko?

p							r
8	1	7	4	3	5	6	2

- esimerkki pikajärjestämisen toiminnasta



- mikä on pikajärjestämisen aikavaativuus?
- pahimmassa tapauksessa partition jakaa m:n pituisen taulukon kahtia siten että toisessa osassa on vain 1 alkio
- pahimman tapauksen vaativuus $T_w(n)$ voidaan määritellä seuraavalla rekursioyhtälöllä:

$$\begin{aligned} T_w(1) &= c \\ T_w(k) &= T_w(1) + T_w(k-1) + ck, \quad \text{kun } k > 1 \end{aligned}$$

- missä c on vakio eli termi ck kuvaa partition-operaation vaativuutta
- lasketaan auki rekursioyhtälöä:

$$\begin{aligned} T_w(n) &= T_w(1) + T_w(n-1) + cn \\ &= c + T_w(1) - T_w(n-2) + c(n-1) + cn \\ &= c + c + T_w(1) + T_w(n-3) + c(n-2) + c(n-1) + cn \\ &\dots \\ &= cn + c\sum_{i=1}^{n} i = cn + \frac{cn(n+1)}{2} = \mathcal{O}(n^2) \end{aligned}$$

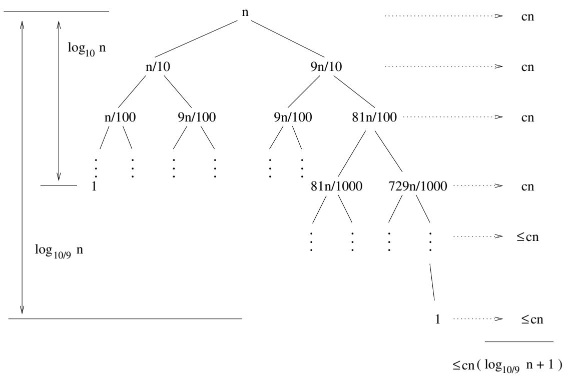
- pahimmassa tapauksessa pikajärjestäminen toimii neliöisesti, eli on selvästi huonompi kuin lomitus- ja kekojärjestäminen
- entä parhaassa tapauksessa, missä partition-operaation sattuu jakamaan taulukon aina kahteen yhtäsuureen osaan?
- parhaan tapauksen vaativuus $T_b(n)$ voidaan määritellä seuraavalla rekursioyhtälöllä:

$$\begin{aligned} T_b(1) &= c \\ T_b(k) &= T_b(k/2) + T_b(k/2) + ck, \quad \text{kun } k > 1 \end{aligned}$$

- yhtälö on täsmälleen sama kuin lomitusjärjestelmän vaativuutta kuvannut yhtälö, eli parhaan tapauksen vaativuus on $\mathcal{O}(n \ log \ n)$
- pikajärjestämisen pahin tapaus on kuitenkin erittäin harvinainen, ja käytännössä pikajärjestys toimii yleensä paremmin kuin lomitus- tai kekojärjestäminen
- *keskimääräisen tapauksen vaativuus* pikajärjestämisellä onkin $\mathcal{O}(n \ log \ n)$
- analysoidaan vielä tilannetta missä partition jakaisi alkioita melko huonosti, eli oletetaan että m:n alkion taulukko jakautuisi pahimmillaan siten että pienemmässä osassa on vain $m/10$ alkiota ja suuremmassa $9m/10$
- näytetään että jopa tässäkin tapauksessa pikajärjestämisen vaativuus olisi $\mathcal{O}(n \ log \ n)$
- "epätasapainoisten jakojen" tapauksen vaativuus $T_u(n)$ voidaan määritellä seuraavalla rekursioyhtälöllä:

$$\begin{aligned} T_u(1) &= c \\ T_u(k) &= T_u(k/10) + T_u(9k/10) + ck, \quad \text{kun } k > 1 \end{aligned}$$

- kirjoitetaan rekursioyhtälöä auki rekursiopuu-muodossa, solmuihin merkitty nyt rekursiokutsua vastaavan taulukonosan pituus



- Saamme siis epätasapainoisten jakojen tapauksen aikavaativuudeksi $T_u(n) \leq cn(log_{10/9} \ n + 1) = cn(\frac{log \ n}{log 10/9} + 1) \leq cn(22 \times log \ n \ + 1) = 22 \times cn(\ log \ n \ + \frac{1}{22}) = \mathcal{O}(n \ log \ n)$
- näinkin epätasapainoinen partitiointi johtaa vielä $\mathcal{O}(n \ log \ n)$ aikavaativuuteen, tosin rekursiotasoja tulee noin 22 kertaa enemmän kuin täysin epätasapainoisissa jaoissa
- pikajärjestämisen tilavaativuus on sama kuin rekursion syvyys pahimmillaan, eli keskimääräisessä tapauksessa $\mathcal{O}(log \ n)$ ja pahimmassa tapauksessa $\mathcal{O}(n)$
- pikajärjestäminen voidaan toteuttaa myös ilman rekursiota jolloin päästään tilavaativuuteen $\mathcal{O}(1)$

- muutama käytännön huomautus:
- lisäysjärjestäminen on lyömätön pienillä aineistoilla
- pikajärjestämistä kannattaakin viritellä siten että jos järjestettävän taulukonosan pituus on enää esim. alle 20, järjestetäänkin tämä osa käyttäen lisäysjärjestämistä, muuten toimitaan kuten pikajärjestämisessä normaalistikin

```
quick-sort(A,p,r)
if r−p<20 then insertion-sort(A,p,q)
else
    q ←partition(A,p,r)
    quick-sort(A,p,q)
    quick-sort(A,q+1,r)
```

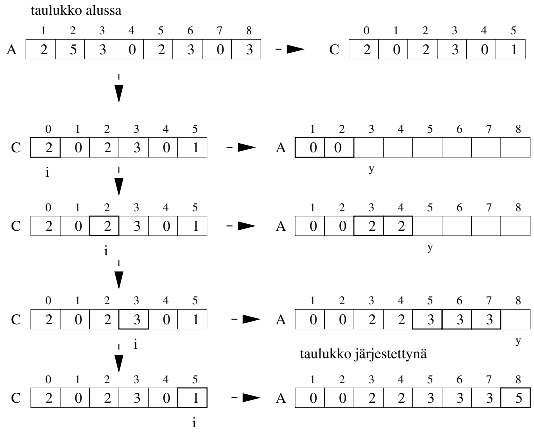
- partition-operaatiossa paras valinta jakoalkioksi olisi jaettavan aineiston mediaani, tällöin jako olisi mahdollisimman tasainen
- mediaanin selvittäminen ei kuitenkaan onnistu lineaarisessa ajassa
- melko hyvä keino on valita jako-alkioksi mediaani arvoista A[p], A[$\lfloor(p+q)/2\rfloor$] ja A[q]
- nyt esim. valmiina järjestyksessä tai käänteisessä järjestyksessä olevan aineiston pikajärjestäminen onnistuukin ajassa $\mathcal{O}(n\ log\ n)$
- pahinta tapausta pikajärjestämisessä ei kuitenkaan voida välttää, mutta pahin tapaus voidaan tehdä niin harvinaiseksi ettei se esiinny käytännössä juuri koskaan

6.4 Järjestäminen lineaarisessa ajassa

- kaikki tähän asti tuntemamme järjestämisalgoritmit perustuvat järjestettävän aineiston lukujen keskinäiseen vertailuun
- voidaan todistaa että vertailuihin perustuva järjestämisalgoritmi ei voi toimia pahimmassa tapauksessa nopeammin kuin ajassa $\mathcal{O}(n\ log\ n)$, ks. Cormen luku 8.1 tai Karvi 6.5
- koska lomitus- ja kekojärjestäminen toimivat pahimmassa tapauksessa ajassa $\mathcal{O}(n\ log\ n)$, ovat ne optimaalisen tehokkaita
- tehokkuusraja $\mathcal{O}(n\ log\ n)$ voidaan kuitenkin rikkoa jos järjestäminen perustuu johonkin muuhun kuin alkioiden keskinäiseen vertailuun
- oletetaan että järjestettävä aineisto A[1,n] koostuu luvuista joiden arvo on väliltä $0, \ldots, k$
- yksinkertainen ja tehokas järjestämismenetelmä saadaan aikaan seuraavasti:
  - otetaan käyttöön aputaulukko C[0,k]
  - käydään A läpi ja lasketaan kuinka monta kertaa kukin luku esiintyy, luvun i esiintymien määrä talletetaan paikkaan C[i]
  - tulostetaan sitten taulukkoon A ensin C[0] kertaa luku 0, C[1] kertaa luku 1 jne
  - näin taulukossa on samat luvut kuin alussa ja luvut ovat suuruusjärjestyksessä!
- algoritmina:


```
counting-sort1(A,k,n)
for i ←0 to k do C[i]←0
for j ←1 to n do
    x ←A[j]
    C[x] ←C[x]+1
y ←1
for i ←0 to k do
    for j ←1 to C[i] do
        A[y] ←i
        y ←y+1
```

- esimerkki:



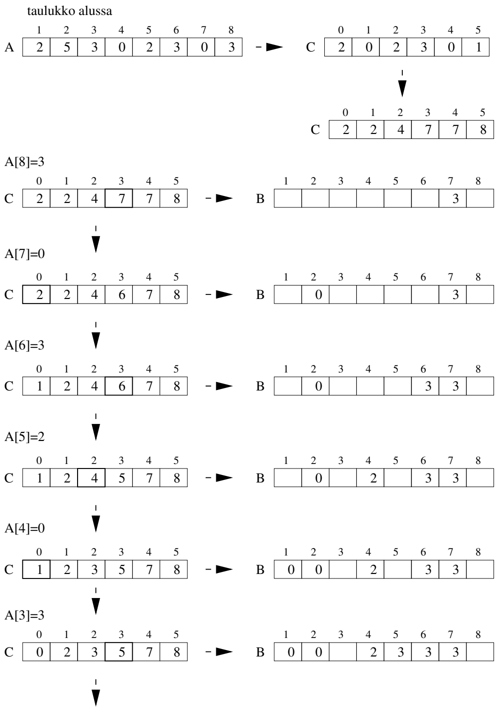
- algoritmi käy kerran läpi taulukon A, kahteen kertaan taulukon C ja tulostaa luvun jokaiseen A:n paikkaan, aikavaativuus siis $\mathcal{O}(n+k)$ ja jos $k = \mathcal{O}(n)$ niin aikavaativuus on lineaarinen järjestettävän aineiston koon suhteen
- tilavaativuus luonnollisesti $\mathcal{O}(k)$
- kutsutaan algoritmia *laskemisjärjestämiseksi* (counting sort), kyseessä ei kuitenkaan ole sama versio laskemisjärjestämisestä mikä löytyy Cormenista ja Karvista
- jos järjestettäviin alkioihin liittyy muita datakenttiä ei juuri esitetty versio laskentajärjestämisestä toimi
- esitetään vielä laskemisjärjestämisestä Cormenin versio joka välttää yllä mainitun ongelman

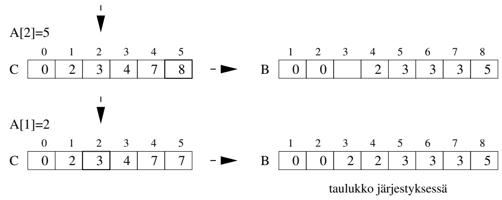
```
counting-sort2(A,k,n)
for i ←0 to k do C[i]←0
for j ←1 to n do
    x ←A[j]
    C[x] ←C[x]+1
for i ←1 to n do
    C[i] = C[i]+C[i-1]
for j ←downto 1 do
    x ←A[j]
    B[C[x]]←x
    C[x] ←C[x]-1
for i ←1 to n do A[i] ←B[i]
```

- toimintaidea:

– algoritmi käyttää aputaulukkoa B[1,n]
– rivien 3-4 for-lauseen jälkeen C[i] sisältää tiedon kuinka monta lukua i taulukossa A on
– rivien 5-6 for-lauseen jälkeen C[i] sisältää tiedon kuinka monta *korkeintaan yhtä suurta* lukua kuin i taulukossa A on
– rivien 7-10 for-lauseke järjestää A:n alkiot taulukkoon B
– laitetaan ensin paikalleen paikan A[n] alkio x
– C[x] kertoo kuinka monta korkeintaan x:n suuruista alkiota taulukossa A on
– x on siis C[x]:nneksi suurin A:n alkioista, eli laitetaan x paikkaan B[C[x]]
– vähennetään vielä arvoa C[x] yhdellä jotta seuraava paikalleen laitettava saman suuruinen alkio menee oikealle paikalleen
– jatketaan laittamalla paikoilleen alkio A[n-1]
– lopuksi kopioidaan järjestetyt alkiot taulukosta B takaisin taulukkoon A

- algoritmi käy kahteen kertaan läpi molemmat taulukot A ja C sekä kertaalleen läpi taulukon B, aikavaativuus siis $\mathcal{O}(n+k)$
- aputaulukon B koko on n ja aputaulukon C koko on k eli tilavaativuus $\mathcal{O}(n+k)$
- edelleen, jos $k = \mathcal{O}(n)$, on molempina vaativuuksina $\mathcal{O}(n)$
- esimerkki Cormenin laskemisjärjestyksen toiminnasta seuraavalla sivulla:





6.5 Yhteenveto järjestämisalgoritmeista

- aikavaativuus

	pahin tapaus	keskim. tapaus	paras tapaus
kupla	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$
lisäys	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n)$
lomitus	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$
keko	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$
pika	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$	$\mathcal{O}(n\ log\ n)$
laskemis	$\mathcal{O}(n+k)$	$\mathcal{O}(n+k)$	$\mathcal{O}(n+k)$

- tilavaativuus
  – lomitusjärjestämisellä $\mathcal{O}(n)$
  – laskemisjärjestämisellä $\mathcal{O}(n+k)$
  – muilla $\mathcal{O}(1)$
- entä käytännössä? mitä kannattaa käyttää?