

# 581378-4 Algoritmisen tietojenkäsittelyn perusteet

## 4. harjoitus, ma 27.11.2000 klo 12:15–14:00 salissa A217

**Tehtävä 4.1:** Lauantain suorassa lottoarvonnassa 7 oikein -täysosumarivien lukumäärä selviää heti arvonnin päätyttyä. Tämä onnistuu, koska tällä kierroksella pelatut lottorivit syötetään (Online-päätteillä) jo ennen arvontaa Veikkauksen keskustietokoneeseen tehokkaaseen tietorakenteeseen. Mutta millainen tuo rakenne voisi olla? Senhän pitäisi sekä (i) antaa lukumäärä ajassa joka ei riipu pelattujen rivien määrästä (jotta suora lähetys ei venyisi) että (ii) viedä vain vakiotilan kutakin pelattua riviä kohden (jotta kone ei täytyisi).

Kaikki pelatut rivit olkoot tavallisia 7-numeroisia yksinkertaisuuden vuoksi.

**Tehtävä 4.2:** Seuraava algoritmi poimii tietueista  $t_1, \dots, t_n$  satunnaisotoksen joka sisältää  $k \leq n$  alkioita:

```
Select( $k, n$ ):
  if  $k > 0$  then
    if random() <  $\frac{k}{n}$  then
      Valitse tietue  $t_n$  otokseen;
      Select( $k - 1, n - 1$ )
    else
      Select( $k, n - 1$ )
    end if
  end if
end if
```

Kirjastofunktio  $0 \leq \text{random}() < 1$  generoi tasaisesti jakautuneita satunnaislukuja.

Osoita, että algoritmi poimii kunkin tietueista otokseen samalla todennäköisyydellä  $\frac{k}{n}$ .

(Vihje: Tarkastele induktiivisesti millä todennäköisyydellä eri rekursiokutsut suoritetaan.)

**Tehtävä 4.3:** Osoita että tehtävän 4.2 algoritmi todellakin pysähtyy, ja arvioi sen aikavaatimusta parhaassa ja pahimmassa tapauksessa.

**Tehtävä 4.4:** Ovatko kaikki luokan P ongelmat palautettavissa toisikseen polynomisin palautuksin?

**Tehtävä 4.5:** Verkon  $G$  solmujen osajoukko  $N$  on *solmupeite* (*Vertex Cover, VC*) jos  $N$  sisältää ainakin toisen päätepisteen jokaisesta verkon  $G$  kaaresta. Solmupeiteongelmassa annetaan syötteinä verkko  $G$  ja luku  $K \in \mathbb{N}$ , ja kysytään onko verkossa  $G$  enintään  $K$  solmua sisältävä solmupeite.

Verkon  $G$  solmujen osajoukko  $N$  on *riippumaton joukko*, (*Independent Set, IS*) jos  $N$  ei sisällä sellaisia solmuja joiden välillä on kaari verkossa  $G$ . Riippumaton joukko -ongelmassa on samat syötteen kuin solmupeiteongelmassakin, mutta vastauksena kysytäänkin onko verkossa  $G$  vähintään  $K$  solmua sisältävä riippumaton joukko.

Solmupeiteongelma on NP-täydellinen. Todista että myös riippumaton joukko -ongelma on.

**Tehtävä 4.6:** Osoita että SAT-ongelma on NP-täydellinen jo sellaisille lauselogiikan kaavoille, joissa esiintyvät muuttujasymbolien lisäksi vain konnektiivit ' $\wedge$ ' ja ' $\neg$ '.

(Tehtäviä yhteensä 6 kpl.)