5.3.5. Sekventti- eli Gentzen-järjestelmät

Gerhard Gentzen (1909-1945) kehitti jo 1930-luvulla (vrt. luku 1.2) sellaisia päättelyjärjestelmiä, joissa todistettavan johtopäätöksen purkaminen oletuksiinsa luvun 5.3.2 sääntöjen tapaan olisi automaattista [Nv01, luvut 2 ja 3].

- Säännöillä ei päätelläkään kaavoja toisista kaavoista vaan väitteitä "tämä kaava voidaan todistaa noista oletuksista" toisista sellaisista väitteistä.

  Nämä väitteet kirjoitetaan
  $$\Gamma \vdash \phi$$
  missä oletusten esitys Γ on *monijoukko (multiset)* kaavoja.

  (Oletusten kokoelma Γ voi olla myös tavallinen joukko tai lista.)

  Toisin sanoen, *totuuden* laskusääntöjen sijaan annetaankin *todistusten* laskusääntöjä.
- *Oikeat (Right)* säännöt käsittelevät johtopäätöstä ϕ:
  $$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta}\, R\wedge$$
  $$\frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\, R\vee_1$$
  $$\frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}\, R\vee_2$$
  $$\frac{\alpha, \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \beta}\, R\Rightarrow \tag{68}$$
  Säännössä (68) merkintä α, Γ tarkoittaa sellaista monijoukkoa, joka saadaan lisäämällä monijoukkoon Γ vielä yksi α.
- *Vasemmat (Left)* säännöt käsittelevät oletuksia Γ:
  $$\frac{\alpha, \beta, \Gamma \vdash \gamma}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \vdash \gamma}\, L\wedge$$
  $$\frac{\alpha, \Gamma \vdash \gamma \quad \beta, \Gamma \vdash \gamma}{\alpha \vee \beta, \Gamma \vdash \gamma}\, L\vee$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta, \Gamma \vdash \alpha \quad \beta, \Gamma \vdash \gamma}{\alpha \Rightarrow \beta, \Gamma \vdash \gamma}\, L \Rightarrow$$

$$\frac{}{\mathbf{F}, \Gamma \Rightarrow \gamma}\, L\mathbf{F} \tag{69}$$

Säännöllä (69) ei ole oletuksia: ristiriitaisista oletuksista seuraa mikä vain γ. (Vrt. yhtälö (18) nyt kun $\mathrm{Mod}(\phi) = \emptyset$.)

- Säännön (69) lisäksi todistuksen haara voi päättyä loogisiin aksioomiin

$$\alpha, \Gamma \Rightarrow \alpha \tag{70}$$

missä α on lausemuuttuja (atomikaava).
(Vrt. luvun 5.3.1 päättelyaksioomat.)
Nyt luvun 5.3.1 patologinen todistusesimerkki on
lausemuuttujalle A aksiooman (70) tapaus.
konjunktiolle $A = B \wedge C$ todistus

$$\cfrac{\cfrac{B, C \vdash B \quad B, C \vdash C}{B, C \vdash B \wedge C}\, R\wedge}{B \wedge C \vdash B \wedge C}\, L\wedge$$

joka jatkuu ylöspäin (olennaisesti) saman ongelman pienempinä tapauksina, joista yksi on alikaavalle B ja toinen alikaavalle C.

disjunktiolle $A = B \vee C$ todistus

$$\cfrac{\cfrac{B \vdash B}{B \vdash B \vee C}\, R\vee_1 \quad \cfrac{C \vdash C}{C \vdash B \vee C}\, R\vee_2}{B \vee C \vdash B \vee C}\, L\vee$$

implikaatiolle $A = B \Rightarrow C$ todistus

$$\cfrac{\cfrac{B \Rightarrow C, B \vdash B \quad C, B \vdash C}{B \Rightarrow C, B \vdash C}\, L\vee}{B \Rightarrow C \vdash B \Rightarrow C}\, R\vee$$

Jo näistä esimerkeistä huomaa, että sekventtitodistuksiet ovat varsin yksityiskohtaisia ja sisältävät paljon turhaa mekaanista kirjanpitoa.

- Kaikilla säännöillä on nyt *alikaavaominaisuus (subformula property):* jokainen oletuksissa esiintyvä kaava esiintyy johtopäätöksessä

- joko sellaisenaan oletuksiin Γ
- tai pienempinä palasina α ja β siitä johtopäätöksen kaavasta jonka sääntö purkaa.

Tällöin todistuksen etsinnän *haarautumisaste on äärellinen*.

- Haarautumisaste tuli äärelliseksi, koska *leikkaussääntö (Cut Rule)*

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \alpha, \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \beta} Cut$$

on nyt luvallinen [Nv01, lause 2.4.3].

Tässä säännössä oikean leikkauskaavan (Cut Formula) α valinta olisi aiheuttanut äärettömyyden.

- Kvanttorisäännöt ovat:

$$\frac{\textsc{Subst}(\{x/t\}, \alpha), \forall x.\alpha, \Gamma \vdash \beta}{\forall x.\alpha, \Gamma \vdash \beta} L\forall \tag{71}$$

$$\frac{\textsc{Subst}(\{x/y\}, \alpha), \Gamma \vdash \beta}{\exists x.\alpha, \Gamma \vdash \beta} L\exists \tag{72}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \textsc{Subst}(\{x/y\}, \alpha)}{\Gamma \vdash \forall x.\alpha} R\forall \tag{73}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \textsc{Subst}(\{x/t\}, \alpha)}{\Gamma \vdash \exists x.\alpha} R\exists \tag{74}$$

Säännöissä (72) ja (73) muuttujasymboli y ei saa esiintyä vapaana johtopäätöksessä.

Säännöissä (71) ja (74) oikean termin t valinta tuottaa jälleen äärettömän haarautumisasteen ongelman, mutta tätä ongelmaa voi osin lieventää algoritmin 13 samastuksella [Pou91, luku 10].

Kannattaa tuntea sekventtijärjestelmienkin periaatteet, koska:

- Niillä voi saada automatisoituvan todistusteorian sellaisillekin logiikoille, joille luvun 5.3.4 resoluutiosääntö ei sovellu.
- Voidaan määritellä uusia logiikoita: esimerkiksi ohjelmointikielten tyyppirakenteiden formaaleissa määrittelyissä ϕ voi olla väite "lauseke e on tyyppiä τ", jolloin Γ taas antaa lausekkeessa e esiintyvien ohjelmointkielen muuttujien tyypit.