5.2. Predikaattilogiikka

Tarkastellaan seuraavaksi *ensimmäisen kertaluvun predikaattilogiikkaa (First-Order Predicate Logic/Calculus, FOPC)*.

- Predikaattilogiikka on keskeinen tietämyksenesityskieli, koska sitä heikommat kielet (kuten luvun 5.1 lauselogiikka) eivät enää riitä esitettävän tiedon monimutkaistuessa.
- On olemassa kieliä, jotka säilyttävät enemmän tietämyksen "rakennetta" kuten sen *käsitehierarkioita* "hauki on sellainen kala, joka. . . ":
  - kehyksiä (frames)
  - semanttisia verkkoja (semantic networks)
  - periytymistä (inheritance) joka päätyi myöhemmin ohjelmointikieliinkin määrittelytietämyksen esitystavaksi
  - . . .

  Sama tietämys voidaan kuitenkin yleensä esittää myös predikaattilogiikalla, joskin kömpelömmin.
- On ehdotettu rikkaampia logiikkoja, joissa olisi lisäksi esimerkiksi

  epämonotonisia piirteitä
  kuten luvun 5 oletussääntöjä "tavalliset linnut lentävät"
  [oletuslogiikka (default logic)]

  aikaa ja sen kulumista koskevia väitteitä
  kuten "huomenna hän tulee"
  [aikalogiikat (temporal logic)]

  tietämystä koskevia väitteitä
  kuten "minä uskon että kaikki muut tietävät jotakin sellaista jota minä en tiedä"
  [episteemiset logiikat (epistemic logics)]

  mutta ei vielä ole yksimielisyyttä *miten* nämä hyödylliset lisäpiirteet tulisi tietämyksenesityskieliin lisätä.
- Predikaattilogiikkaa on tutkittu kauan ja perusteellisesti.
- Predikaattilogiikka riittää moniin tilanteisiin.

- Muut tietämyksenesityskielet sisältävät usein predikaattilogiikan tai suuren osan siitä.

Predikaattilogiikka on selvästi rikkaampi kieli kuin luvun 5.1 lauselogiikka. Sen määrittelykin on selvästi mutkikkaampaa.

5.2.1. Syntaksi

Predikaattilogiikan syntaksiin kuuluu 3 erillistä *symboliluokkaa*:

Muuttujasymbolit $\mathcal{X} = \{x_i \colon i \in \mathbb{N}\}$.
Funktiosymbolit $\mathcal{F} = \{f_j \colon j \in \mathbb{N}\}$.
Predikaattisymbolit $\mathcal{P} = \{p_k \colon k \in \mathbb{N}\}$.

Kuhunkin funktio- ja predikaattisymboliin s liittyy vielä *paikkaluku (arity)* $\mathrm{ar}(s) \in \mathbb{N}$, joka kertoo sen argumenttien määrän.

0-paikkaista funktiosymbolia f (eli $\mathrm{ar}(f) = 0$) kutsutaan myös *vakioksi (constant)*.

- Kukin muuttujasymbolin esiintymä x_i on *termi (term)*.
- Jos f on funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f)}$ ovat termejä, niin myös $f(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f)})$ on termi.
  Jos f on vakio, niin termistä $f()$ voidaan jättää turhat tyhjät sulut pois.
- Muita termejä ei ole.
- Jos p on predikaattisymboli ja $t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)}$ ovat termejä, niin $p(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)})$ on *[atomi]kaava ([atomic] formula)*.
- Jos ϕ on kaava ja x_i muuttujasymboli, niin $(\exists x_i \phi)$ on myös kaava.
  Merkki '$\exists$' on nimeltään *eksistenssi- eli olemassaolokvanttori (existential quantifier)*.
- Kuten luvun 5.1 lauselogiikassakin: jos ϕ ja ψ ovat kaavoja, niin $(\neg\phi)$ ja $(\phi \wedge \psi)$ ovat myöskin kaavoja.
- Muita kaavoja ei ole.

Otetaan jälleen käyttöön taulukon 4 lyhenteet, joihin lisätään vielä lyhenne

$$(\forall x_i \phi) \text{ kaavalle } (\neg \exists x_i (\neg \phi)).$$

Merkki '$\forall$' on nimeltään *universaali- eli kaikkikvanttori (universal quantifier)*.

Sovitaan lisäksi lyhennysmerkintä '$(Qx_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\phi)$' toistuvalle kvanttorille Q, eli kaavalle $(Qx_1(Qx_2(Qx_3(\ldots(Qx_m\phi)\ldots))))$.

Poistetaan jälleen sulkuja sopimalla samat presedenssisäännöt kuin luvussa 5.1. Lisäksi sovitaan, että kvanttorit sitovat yhtä voimakkaasti kuin '$\neg$'. Siis

$$\exists x p(x) \land q(x) \text{ suluttuu } (\exists x p(x)) \land q(x).$$

Usein kvanttorin Q halutaankin ulottuvan *pienimmän* mahdollisen *alikaavan (subformula)* sijasta *suurimpaan* ϕ. Tähän käytetään notaatiota '$Qx.\phi$'. Siis

$$\exists x.p(x) \land q(x) \text{ suluttuu } \exists x(p(x) \land q(x)).$$

Usein predikaattisymbolien joukossa $\mathcal{P}$ on erikoinen *yhtäsuuruus (equality)* $t_1 = t_2$ termeille t_1 ja t_2. Periaatteessa '$=$' voidaan käsitellä kuten mikä tahansa muu predikaattisymbolikin, mutta käytännössä se on niin yleinen, että usein se käsitellään erikseen sekä syntaksissa etta semantiikassa.

Yhtäsuuruuden avulla voidaan määritellä uusi kvanttorilyhenne '$\exists! x\,\mathrm{presidentti}(x)$' tarkoittamaan kaavaa

$$\exists x(\underbrace{\mathrm{presidentti}(x) \land}_{1} \forall y. \underbrace{\mathrm{presidentti}(y) \Rightarrow}_{2} x = y).$$

Tulemme määrittelemään kvanttorien semantiikan niin, että tämä lause sanoo "on tasan yksi presidentti" sanomalla

1. "on *ainakin yksi* presidentti, ja
2. *kaikki* presidentit ovat itse asiassa sama olento kuin tuo yksi".

Merkintä '$\iota x\,\mathrm{presidentti}(x)$' tarkoittaa puolestaan tuota vastaavaa yksikäsitteistä presidenttiä.

Samalla nähdään, miten voidaan sanoa

1. "joukosta S löytyy jokin x, jolle. . . " ja
2. "kaikille joukon S jäsenille pätee. . . ".

Samalla näemme ilmaisuvoiman laajentuneen: lauseen

alussa puhumme tuntemattomasta presidentistä nimeltään "herra/rouva x" ja

lopussa palaamme puhumaan *samasta* x toistamiseen.

Luvun 5.1 lauselogiikassa taas lauseen jokaisen osan piti olla kokonainen väitelause.

Pronominit (lat. pro nomen, "nimen sijasta") ilmestyivät näin kieleemme: "on ainakin yksi henkilö joka on presidentti, ja kaikki muut presidentit ovat sama henkilö kuin *hän*".

5.2.2. Semantiikka

Predikaattilogiikan kaavan ϕ tulkinta (epä)todeksi tapahtuu matemaattisessa rakenteessa $\mathfrak{M} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{I} \rangle$, jonka osat ovat:

Universumi $\mathcal{U}$ on joukko.

Sen alkioina ovat kaikki ne oliot, joita kaavan ϕ termit saattavat saada arvoinaan.

Jos esimerkiksi ϕ puhuu luonnollisista luvuista, niin $\mathcal{U} = \mathbb{N}$.

Kielellisesti $\mathcal{U}$ koostuu kaikista *yksikäsitteisistä jakamattomista erisnimistä*: 'St. Petersburg', 'Venäjän Itämeren laivasto', 'Tsaari Pietari Suuri', 'puna-armeija', 'Leo Davidovits Trotski', . . .

Tulkintafunktio $\mathcal{I}$ on funktio tietämyksenesityskielen sanastolta sanojen merkityksille.

- $\mathcal{I}$ kuvaa jokaisen funktiosymbolin $f \in \mathcal{F}$ joksikin funktioksi $\mathcal{I}(f) \colon \mathcal{U}^{\mathrm{ar}(f)} \mapsto \mathcal{U}$.

  Esimerkiksi universumissa $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ tulkitaan 2-paikkainen funktiosymboli '$+$' yhteenlaskuoperaatioksi.

  Kielellisesti $\mathcal{I}(f)$ vastaa *epäsuoraa rakenteista mutta silti yksikäsitteistä nimeä*, esimerkiksi $\mathcal{I}(\text{founder})$ voisi olla 'x:n perustaja'.
- $\mathcal{I}$ kuvaa jokaisen predikaattisymbolin $p \in \mathcal{P}$ joksikin relaatioksi $\mathcal{I}(p) \subseteq \mathcal{U}^{\mathrm{ar}(p)}$.

  Esimerkiksi universumissa $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ tulkitaan 2-paikkainen relaatiosymboli '$\leq$' lukujen keskinäiseksi järjestysrelaatioksi.

  Kielellisesti $\mathcal{I}(p)$ vastaa väitelausetta kuten lausemuuttuja P luvun 5.1 lauselogiikassa.

  Nyt kuitenkin tämän väitelauseen *nimiä koskevat osat* kuten subjektit ja objektit saattavat *vaihdella* (lauseen antamissa rajoissa):
  - erisnimen tilalla saattaa nyt olla pronomini
  - pronominiä edustaa muuttujasymboli
  - muuttujan/pronominin viittauskohde ei ole kiinteä.
    "Jokaiselle joku on rakkain."

Esimerkiksi $\mathcal{I}(\text{founded})$ saattaa olla "x perusti y:n" eli

$$\begin{aligned}\{\ &\langle\text{Tsaari Pietari Suuri, St. Petersburg}\rangle\ ,\\ &\langle\text{Tsaari Pietari Suuri, Venäjän Itämeren laivasto}\rangle\ ,\\ &\langle\text{Leo Davidovits Trotski, puna-armeija}\rangle\ ,\ldots\}.\end{aligned}$$

Erityisesti $\mathcal{I}(=) = \{\langle v, v\rangle : v \in \mathcal{U}\}$.

Vielä tarvitaan tulkinta muuttujasymboleille $\mathcal{X}$. Sitä ei voida liittää rakenteeseen $\mathfrak{M}$, koska kvanttorit lisättiin luvun 5.1 lauselogiikkaan juuri siksi, että muuttujien tulkinnat voisivat vaihdella.

Sijoitus (assignment) on mielivaltainen funktio $\theta\colon \mathcal{X} \mapsto \mathcal{U}$.

Nyt voidaan määritellä predikaattilogiikan semantiikka "kaava ϕ on totta tulkinnalla $\mathfrak{M}$ ja sijoituksella θ". Sitä merkitään

$$\mathfrak{M} \models \phi\theta.$$

Määrittely on jälleen induktiivinen luvun 5.2.1 kaavanrakennussääntöjen suhteen:

- $\mathfrak{M} \models (\phi \wedge \psi)\theta$ pätee jos ja vain jos sekä $\mathfrak{M} \models \phi\theta$ että $\mathfrak{M} \models \psi\theta$ pätevät.
  Kielellisesti siis '$\wedge$' on edelleen 'ja'.
- $\mathfrak{M} \models (\neg\phi)\theta$ pätee jos ja vain jos $\mathfrak{M} \models \phi\theta$ ei päde.
  Tätä ehtoa merkitään usein lyhyemmin $\mathfrak{M} \not\models \phi\theta$.
  Kielellisesti siis '$\neg$' on edelleen 'ei'.
- $\mathfrak{M} \models (\exists x_i\phi)\theta$ pätee jos ja vain jos on olemassa jokin $u \in \mathcal{U}$ jolla $\mathfrak{M} \models \phi\theta[x_i = u]$ pätee, missä

$$\theta[x_i = u](x_j) = \begin{cases} u & i = j \\ \theta(x_j) & i \neq j \end{cases}$$

on se sijoitus, joka on muuten kuin θ, paitsi että x_i saakin siinä arvon u.

Toisin sanoen, jos ja vain jos muuttuja x_i voidaan sitoa johonkin sellaiseen arvoon $u \in \mathcal{U}$ että ϕ tulee todeksi ilman että minkään muun muuttujan x_j sidontaa täytyy muuttaa.

Vertaa tietokoneen muistiin kirjoitus:

- sijoitus θ on muisti taulukkona
- muuttujasymbolit x_i ovat muistiosoitteita
- arvot u ovat muistipaikkojen sisältöjä.

Kielellisesti

- '$\exists$' vastaa ilmaisua 'on olemassa sellainen... että...' eli "jollakin"
- '$\forall$' vastaa ilmaisua 'ei ole olemassa sellaista... ettei...' eli 'kaikilla...'.

Tai '$\exists x \phi$' voidaan tulkita sellaiseksi *metakielen äärettömäksi disjunktioksi, jonka koko riippuu universumista* $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$: $\mathfrak{M} \models \phi\theta[x_i = u_1]$ tai $\mathfrak{M} \models \phi\theta[x_i = u_2]$ tai $\mathfrak{M} \models \phi\theta[x_i = u_3]$ tai . . .

Tällöin '$\forall x \phi$' olisi vastaava konjunktio.

- $\mathfrak{M} \models p(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(p)})\theta$, missä $p \in \mathcal{P}$ on siis predikaattisymboli, pätee jos ja vain jos

$$\left\langle \mathrm{value}(t_1, \theta), \ldots, \mathrm{value}(t_{\mathrm{ar}(p)}, \theta) \right\rangle \in \mathcal{I}(p),$$

missä termin t arvo $\mathrm{value}(t, \theta)$ sijoituksessa θ määritellään induktiivisesti alla.

Kielellisesti tässä *Tarskilaisessa totuusmääritelmässä* tapahtuu seuraavaa:

1. Ensin selvitämme, mihin olioon eli jakamattomaan erisnimeen $n_i = \mathrm{value}(t_i, \theta) \in \mathcal{U}$ kukin termi eli mahdollisesti rakenteinen epäsuora nimi t_i tällä hetkellä viittaa.
2. Sitten selvitämme, mihin väitelauseeseen $L = \mathcal{I}(p)$ predikaattisymboli p viittaa. Väitelauseessa L on $\mathrm{ar}(p)$ mahdollisesti vaihtelevaa nimiosaa.
3. Sitten täytämme nimillä n_i väitelauseen L vaihtelevat nimiosat.

Saadaan lopullinen metakielinen väitelause L' ilman vaihtelevia nimiosia.

4. Lopuksi kysymme, onko tämä L' totta vai ei.
   Se, miten tähän kysymykseemme saadaan metakielessä vastaus, ei enää ole objektikielen eli predikaattilogiikan määräysvallassa.

- Muuttujasymboleille $x_i \in \mathcal{X}$ määritellään $\mathrm{value}(x_i, \theta) = \theta(x_i)$.
- Funktiosymboleille $f \in \mathcal{F}$ taas $\mathrm{value}(f(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f)}), \theta) = \mathcal{I}(f)(\mathrm{value}(t_1, \theta), \ldots, \mathrm{value}(t_{\mathrm{ar}(f)}, \theta))$.
  Vertaa aliohjelmakutsun *suoritus sieventämällä* funktionaalisessa ohjelmointikielessä kuten Scheme:
  – Muuttujasymbolin x_i arvo katsotaan muuttujamuistista θ.
  – Lausekkeen $f(t_1, \ldots, t_{\mathrm{ar}(f)})$ eli `(`f t_1 `...` $t_{\mathrm{ar}(f)}$`)` arvo lasketaan
    1. laskemalla ensin rekursiivisesti sen argumenttien t_i arvot n_i
    2. katsomalla sitten funktiomuistista $\mathcal{I}$ mitä funktiota g nimi f vastaa
       (Alkuperäisessä Lisp-kielessä tehdäänkin tämä ero funktio- ja muuttujamuistien välillä, Schemessä ei.)
    3. ja lopuksi kutsumalla saatua funktiota g lasketuilla parametreilla n_i.

Näin on määritelty predikaattilogiikan semantiikka.

Tarkastellaan esimerkkinä kaavaa

$$\forall x.\, \mathrm{founded}(\mathrm{founder}(x), x) \tag{29}$$

eli "jokaiselle x pätee, että x:n perusti sen perustaja":

1. $\mathfrak{M} \models$ (kaava (29))θ pätee jos ja vain jos kaikille $u \in \mathcal{U}$ pätee

$$\mathfrak{M} \models \mathrm{founded}(\mathrm{founder}(x), x)\, \underbrace{\theta[x = u]}_{\text{merk. } \theta'}\,. \tag{30}$$

Kielellisesti: jos ja vain jos jokainen lause $\mathrm{founded}(\mathrm{founder}(w), w)$ on totta, missä w on mikä tahansa sellainen erisnimi, joka voidaan muodostaa kielen sanoilla.

2. Yhtälö (30) puolestaan pätee jos ja vain jos

$$\left\langle \text{value}(\text{founder}(x), \theta'), \text{value}(x, \theta') \right\rangle \in \underbrace{\mathcal{I}(\text{founded})}_{\text{merk. } p}$$

on totta, missä

$$\begin{aligned} \text{value}(x, \theta') &= \theta'(x) \\ &= \theta[x = u](x) \\ &= u \\ \text{value}(\text{founder}(x)\theta') &= \mathcal{I}(\text{founder})(\text{value}(x, \theta')) \\ &= \underbrace{\mathcal{I}(\text{founder})}_{\text{merk. } f}(u). \end{aligned}$$

Toisin sanoen, jos ja vain jos

$$\langle f(u), u \rangle \in p.$$

Kielellisesti: olio u on mielivaltaisen erisnimen w tulkinta.

3. Toisin sanoen, kaava (29) pätee jos ja vain jos
   - funktiosymbolin founder tulkinta f
   - kuvaa jokaisen alkion $u \in \mathcal{U}$
   - sellaiseksi alkioksi $v \in \mathcal{U}$
   - että pari $\langle v, u \rangle$ kuuluu relaatiosymbolin founded tulkintaan p.

   Kielellisesti: voimme järkeillä tämän merkitsevän samaa kuin joukko-opillinen väite

$$p = f^{-1}.$$

Tämä totuusmääritelmä antaa samalla muuttujille samanlaiset *leksikaaliset näkyvyysalueet (lexical scope)* kuin (yleensä) ohjelmointikielissä, esimerkiksi Scheme-kielessä:

Jokainen muuttuja on *lähimmän eli juuri tekstuaalisesti edeltävän* kvanttorinsa "määräysvallassa".

Siis kaavassa

$$\boxed{\underbrace{\exists x_1}_{(a)} . p_1(\underbrace{x_1}_{(b)}) \land \boxed{\underbrace{\forall x_1}_{(c)} . p_2(\underbrace{x_1}_{(d)})}} \tag{31}$$

muuttujan x_1 ensimmäistä esiintymää (b) kontrolloi kvanttori (a), mutta saman muuttujan x_1 toista esiintymää (d) kontrolloikin toinen, sitä läheisempi kvanttori (c). Kaavan totuutta tutkittaessa muuttuja x_1 voi siis saada kohdissa (b) ja (d) eri arvot, koska kohdassa (c) valittava arvo "peittää näkyvistä" aiemmin kohdassa (a) valitun arvon.

Kvantifioidun muuttujan symbolia voidaan vaihtaa korvaamalla systemaattisesti kaikki kyseisen kvanttorin kontrolloimat esiintymät uudella symbolilla. Näin kaavasta (31) voidaan tällä *uudelleennimennällä (renaming)* tuottaa yhtäpitävä, selkeämpi muoto

$$\underbrace{\exists x_1}_{(a)} . p_1(\underbrace{x_1}_{(b)}) \land \underbrace{\forall x_2}_{(c)} . p_2(\underbrace{x_2}_{(d)}).$$

Haluamme kutsua yhtälöä (17) seuraten predikaattilogiikan kaavan ϕ malleiksi niitä tulkintoja $\mathfrak{M}$ joissa ϕ on tosi. Nyt kuitenkin täytyy ottaa huomioon myös sijoitukset θ, ja määritellä

$$\mathrm{Mod}(\phi) = \{\mathfrak{M} \colon \mathfrak{M} \models \phi\theta \text{ kaikilla } \theta\} . \tag{32}$$

Tällöin kaavan ϕ *vapaat muuttujat (free variables)* — eli ne jotka esiintyvät ilman minkään kvanttorin kontrollointia — tulkitaan näkymättömästi universaalikvantifioiduiksi.

Kaavaan (29) tämä ei vaikuta, koska siinä ei ole vapaita muuttujia. Tällaisia kaavoja sanotaan *suljetuiksi kaavoiksi (closed formulae)*.

Tietämyskantaan KB lisätään (operaatiolla $\textsc{Tell}$) yleensä vain suljettuja kaavoja, koska vapaat muuttujat saattaisivat aiheuttaa yllättäviä riippuvuuksia eri aikoina lisättyjen kaavojen välille.