Kääntäen teko 'irrota' kumoaa tarttumisen:

$$\forall x, s. \neg\, \mathrm{holding}(x, \mathrm{result}(\mathrm{release}, s)).$$

Näin kuvaillaan kaikki mahdolliset teot, joita Wumpus-esimerkissä ovat

$$\mathrm{turn}(\mathrm{right}) \qquad \mathrm{turn}(\mathrm{left}) \qquad \mathrm{forward}$$
$$\mathrm{shoot} \qquad \mathrm{grab} \qquad \mathrm{release} \qquad \text{ja} \qquad \mathrm{climb}$$

missä uudet teot ovat seuraavat:

- Teko shoot ampuu viinen ainoan nuolen nykyiseen kulkusuuntaan tappaen osuessaan wumpus-hirviön, joka huutaa kuollessaan.
- Teko climb kiipeää pois labyrintista mutta vain sen alkuruudussa.

Maailman muutoksista kertovien vaikutusaksioomien lisäksi tarvitaan *kehysaksioomia (frame axioms)* kertomaan miten maailma *ei* muutu.

Esimerkiksi "käteen otettu tavara pysyy kädessä kunnes ote siitä irrotetaan":

$$\begin{aligned} &\forall a, x, s.\, \mathrm{holding}(x, \mathrm{result}(a, s)) \\ &\qquad \Leftrightarrow a = \mathrm{grab} \wedge \mathrm{present}(x, s) \wedge \mathrm{portable}(x) \\ &\qquad\qquad \vee \\ &\qquad\qquad \mathrm{holding}(x, s) \wedge a \neq \mathrm{release}\,. \end{aligned}$$

(Olisi siis kannattanut määritellä apukäsite 'tartuttavissa oleva'. . .)

Tällaisen *seuraajatilanneaksiooman (successor-state axiom)* yleinen muoto on

totta edelleen ⇔ tämä teko teki sen todeksi

∨

jo totta eikä tämä teko muuttanut sitä

Sellainen tarvitaan jokaiselle predikaatille, jonka totuus voi vaihtua siirryttäessä tilanteesta toiseen.

Tekoälyssä on pohdittu paljon maailman muuttumisen kuvailuun liittyviä *ongelmia*:

Kehysesityso. (Representational Frame Problem) on se, että kehysaksioomia kertyy helposti tolkuttoman monta.

Seuraajatilanneaksioomien käyttö ehkäisee tätä ongelmaa.

Kehyspäättelyo. (Inferential F. P.) on se, että käytettäessä näin esitettyä tietämystä joudutaan joka hetki päättelemään paitsi juuri tapahtuneet muutokset myös uudelleen kaikki se, mikä *ei* muuttunut.

Suunnittelujärjestelmät (planning systems) [RN95, osa IV][Nil98, osa IV] pyrkivät ratkaisemaan tätä ongelmaa pitämällä erikseen kirjaa kuhunkin tekoon liittyvistä

- edellytyksistä lähtötilanteelta
- seurauksista tulostilanteelle

ja valitsemalla suunnitelmaksi sellainen tekojono jossa

- saavutetaan haluttu tavoite
- kunkin teon edeltäjät joko varmistavat tai turvaavat sen edellytykset
- kunkin teon edellytykset ja seuraukset päätellään paikallisesti naapuritekojen perusteella käyttäen yksinkertaistettua logiikkaa.

Silloin tilanteet esitetään implisiittisesti eikä enää kuvan 60 suurina tulostermeinä

$$\mathrm{result}(\mathrm{forward}, \mathrm{result}(\mathrm{turn}(\mathrm{right}), \mathrm{result}(\mathrm{forward}, S_0))).$$

Lisäksi tällaiset tulostermit johtavat *sarjalliseen* suunnitelmaan, kun taas toisistaan riippumattomat teot voitaisiin hoitaa missä järjestyksessä tahansa. Tämä on *osittain järjestettyä suunnittelua (Partial-Order Planning)*.

Ehdollistamiso. (Qualification P.) on se, että on vaikea antaa *tarkalleen* niitä olosuhteita joissa jokin teko *varmasti* tuottaa tuloksensa.

Mikä kaikki voi mennä pieleen kultaa nostettaessa? Harkko voi olla liukas ja pudota käsistä, selkä voi venähtää kumartaessa,. . .

Haarautumiso. (Ramification P.) on se, että on vaikea kuvailla tekojen *kaikkia* vaikutuksia.
Harkon mukana nousee jokainen sen pinnalla oleva pölyhiukkanenkin; onko niistä(kin) pidettävä kirjaa päättelemällä?

Wumpus-esimerkissä on selvästi muistettava myös toimijan nykyinen paikka. Aksiomatisointi voitaisiin rakentaa vaikkapa seuraavasti:

- Määritellään predikaatti

$$\mathrm{at}(\text{olio}, [x\text{-koordinaatti}, y\text{-koordinaatti}], \text{tilanne})$$

  tarkoittamaan "olio on ruudussa x,y annetussa tilanteessa".
  Silloin se soveltuu muihinkin olioihin (eli kultaan, kuoppiin, hirviöön,. . .) kuin vain toimijaan agent.
  Alkutilanteessa $\mathrm{at}(\mathrm{agent}, [1, 1], S_0)$ kuvan 60 mukaisesti.
- Määritellään vastaavasti funktio

$$\mathrm{orientation}(\text{olio}, \text{tilanne})$$

  muistamaan (geometrisina asteina) sitä suuntaa, johon olio etenee:

aste	**suunta**	
0	kasvava	x-akseli
90	kasvava	y-akseli
180	vähenevä	x-akseli
270	vähenevä	y-akseli

  Alkutilanteessa $\mathrm{orientation}(\mathrm{agent}, S_0) = 90$ kuvan 60 mukaisesti.
- Koordinaatit ja suunnat yhdistyvät funktiolla

$$\forall x, y.\, \mathrm{location\_toward}([x, y], 0) = [x + 1, y]$$
$$\forall x, y.\, \mathrm{location\_toward}([x, y], 90) = [x, y + 1]$$
$$\forall x, y.\, \mathrm{location\_toward}([x, y], 180) = [x - 1, y]$$
$$\forall x, y.\, \mathrm{location\_toward}([x, y], 270) = [x, y - 1]$$

jonka avulla voidaan määritellä funktio "edessä oleva ruutu"

$$\forall p, l, s.\, \mathrm{at}(p, l, s) \Rightarrow \mathrm{location\_ahead}(p, s) = \mathrm{location\_toward}(l, \mathrm{orientation}(p, s))$$

ja "naapuruus"

$$\forall l_1, l_2.\, \mathrm{adjacent}(l_1, l_2) \Leftrightarrow \exists d. l_1 = \mathrm{location\_toward}(l_2, d).$$

Varsinaista aritmetiikkaa ei oikeasti esimerkissämme tarvita, koska suuntia ja ruutuja on labyrintissa äärellinen ja etukäteen tunnettu määrä.
Jos tarvittaisiin, niin saatettaisiin joutua (jo luvuissa 1.2 ja 5 mainittuihin) ongelmiin, koska kaikkea luonnollisten lukujen aritmetiikkaa ei voi tyhjentävästi kuvailla loogisesti. Usein kuitenkin yksinkertainen ja rajoitettu aritmetiikka riittää.

- Kerrotaan vielä mitä tiedämme itse labyrintista:

$$\forall x, y.\, \mathrm{wall}([x, y]) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5 \vee y = 0 \vee y = 5.$$

- Varsinainen aksiomatisointi alkaa yhdistämällä paikan muuttuminen vastaavaan tekoon $\mathrm{forward}$ sopivalla seuraajatilanneaksioomalla:

$$\begin{aligned}\forall a, d, p, s, l.\, \mathrm{at}(p, l, \mathrm{result}(a, s)) \Leftrightarrow \\ a = \mathrm{forward} \wedge l = \mathrm{location\_ahead}(p, s) \wedge \\ \neg\, \mathrm{wall}(l) \\ \vee \\ \mathrm{at}(p, l, s) \wedge a \neq \mathrm{forward}\,.\end{aligned}$$

- Tämän teon vaikutukset riippuvat kuitenkin sen tekijän senhetkisestä etenemissuunntasta, joten on aksiomatisoitava myös miten suunta muuttuu vastaavien tekojen vaikutuksesta:

$$\forall a, d, p, s.\, \text{orientation}(p, \text{result}(a, s)) = d \Leftrightarrow$$
$$a = \text{turn}\begin{pmatrix}\text{left}\\ \text{right}\end{pmatrix} \wedge$$
$$d = (\text{orientation}(p, s) \pm 90) \mod 360$$
$$\vee$$
$$\text{orientation}(p, s) = d \wedge$$
$$a \neq \text{turn}(\text{left}) \wedge a \neq \text{turn}(\text{right}).$$

Nyt kun toimijan paikka ja sen muutokset on aksiomatisoitu, voidaan alkaa liittämään toimijan tekemiä havaintoja vastaaviin paikkoihin:

$$\forall l, s.\, \text{at}(\text{agent}, l, s) \wedge \text{breeze}(s) \Rightarrow \text{breezy}(l) \tag{38}$$

missä $\text{breeze}(s)$ määritellään havainnon pohjalta kaavan (37) tapaan.

Tämä on hyödyllistä varsinkin kun tiedämme, että vetoisuus ei riipu ajasta – eikä $\text{breezy}(l)$ siis tarvitse enää tilanneargumenttia.

Silloin toimija voi jälleen kerätä tietoa siitä, missä paikoissa vetää ja missä löyhkää, ja päätellä näin turvalliset ruudut kuten lauselogiikalla tehtiin luvussa 5.1.

Tähän päättelyyn tarvittavat säännöt ovat

synkronisia eli samanaikaisia, koska ne kuvaavat yhden ja saman maailman tilan ominaisuuksia.

erotukseksi esimerkiksi seuraajatilanneaksioomista, jotka ovat

diakronisia eli "aikaa halkovia" kuvatessaan miten maailman tila vaihtuu toiseksi.

Synkronisia sääntöjä on kahta päätyyppiä:

Kausaalisääntöjä jotka ilmaisevat, että jokin maailman kätketty piirre aiheuttaa jonkin havaittavissa olevan ilmiön.
Esimerkiksi wumpusta ei havainnoida suoraan, vaan sen aiheuttaman löyhkän perusteella:

$$\forall l_1, l_2, s.\, \text{at}(\text{wumpus}, l_1, s) \wedge \text{adjacent}(l_1, l_2) \Rightarrow \text{smelly}(l_2).$$

Kausaalisäännnöillä päätteleviä järjestelmiä kutsutaan *mallipohjaisiksi (model-based)*, koska niillä on sisäinen "malli" siitä, miten maailma toimii. (Tämä mallin käsite on sukua muttei identtinen loogiselle mallille $\mathfrak{M}$.)

Diagnoosisääntöjä jotka ilmaisevat syy-seuraussuhteiden toisen suunnan, eli miten saaduista havainnoista voi päätellä maailman jonkin kätketyn piirteen.
Esimerkiksi kaava (38) on (hyvin naiivi) tällainen sääntö.

Pelkistä diagnoosisäännöistä ei aina ole helppoa päätellä tarpeeksi vahvoja johtopäätöksiä. Siksi esimerkiksi lääketieteellisessä diagnoosissa on alettu siirtyä massiivisista diagnoosisääntöpankeista järjestelmiin, joiden kausaalisäännöt kuvaavat jonkin mallin kyseisen taudin etenemisprosessista.

Wumpus-esimerkissämme yksinkertaisin tapa määritellä keskeinen käsite "turvallinen ruutu" lienee mallipohjainen sääntö

$$\forall x, t.\, \text{ok}(x) \Leftrightarrow \neg(\text{at}(\text{wumpus}, x, t) \vee \text{pit}(x))$$

kun taas diagnoosisäännöillä pitäisi erikseen selittää kaikki ne mahdolliset havaintoyhdistelmät, joista turvallisuus seuraa.

Jos *aksiomatisointi kuvaa täydellisesti* (ja oikein) sen miten maailma toimii ja sen miten tämä toiminta synnyttää saadut havainnot, **niin** *hyvä päättelykone* pystyy silloin tuottamaan sellaisen kuvauksen maailman tilasta, joka pitää mahdollisimman tarkasti yhtä saatujen havaintojen kanssa.

Predikaattilogiikalla voidaan myös vertailla eri tekoja ja suositella vertailun voittajia. Näin lähestytään luvun 2.4 päämäärähakuisia toimijoita. *Tekojen arvotusjärjestelmä (action-value system)* voi esimerkiksi luokitella teot luokkiin kuten

$$\text{great} > \text{good} > \text{medium} > \text{risky} > \text{deadly}\,.$$

Wumpus-esimerkissä:

Erinomaisia tekoja ovat poimia kulta tai kiivetä pois sen kanssa.

Hyvä teko on vaikkapa siirtyä tutkimattomaan turvalliseen ruutuun.

Välttävä teko on vaikkapa palata jo tutkittuun (turvalliseen) ruutuun.

Vaarallinen teko on vaikkapa siirtyä ruutuun, jota ei ole pystytty osoittamaan turvalliseksi.

Tappava teko on vaikkapa siirtyä ruutuun, jossa on osoitettu olevan wumpus tai kuoppa.

Esimerkiksi periaate "tarjoa hyvää tekoa ellei erinomaista ole tarjolla" voidaan ilmaista

$$\forall a, s.\, \text{good}(a, s) \wedge (\neg \exists b\, \text{great}(b, s)) \Rightarrow \text{action}(a, s).$$

Näin saadaan kyllä menetelmä löytää kulta ottamatta tarpeettomia riskejä. Kullan löydyttyä pitäisi kuitenkin arvotusjärjestelmää muuttaa suosimaan turvallista paluuta kohden alkuruutua uusien turvallisten ruutujen tutkimisen sijasta.

Tämä lienee helpointa toteuttaa antamalla toimijan tietoon myös se tavoite, johon pyritään:

$$\forall s.\, \text{holding}(\text{gold}, s) \Rightarrow \text{goal\_location}([1, 1], s)$$

kun taas

$$\forall s, l. \neg\, \text{holding}(\text{gold}, s) \wedge \text{ok}(l) \Rightarrow \text{goal\_location}(l, s).$$

5.3. Todistusteoriaa [RN95, luku 9]

Kun tietämys on esitetty (ensimmäisen kertaluvun predikaatti)logiikalla on vuorossa sen käyttö. Tähän tarvitaan *päättelymekanismeja*, jotka kertovat mitä esitetystä tietämyksestä seuraa.

Tarkastellaan joitakin loogisia päättelyjärjestelmiä siltä kannalta, kuinka hyvin ne voisi automatisoida.

Järjestelmien yksityiskohtiin ei kuitenkaan mennä.

5.3.1. Aksiomaattiset eli Hilbert-järjestelmät

Luvussa 1.2 mainittu David Hilbert ehdotti seuraavanlaisia päättelyjärjestelmiä:

- Tarpeeksi *paljon* "itsestään selviä" päättely*aksioomia*.

  Nämä aksioomat kuvailevat loogisia totuuksia, kun taas sovellusalueen aksiomatisointi kuvaili tietämystä.

  Tällaisia voisivat olla esimerkiksi
  - lauselogiikan tautologiat
  - sellaiset predikaattilogiikan kaavat, jotka saadaan korvaamalla tautologioissa kukin lausemuuttuja jollakin kaavalla.
- Mahdollisimman *vähän* päättely*sääntöjä* joilla aksioomista ja aiemmista johtopäätöksistä voi johtaa uusia johtopäätöksiä.

  Tavallisesti otetaan vain [Vää87, luku 5]
  - modus ponens taulukosta 7
  - kvanttoreille yleistyssäännöt "kaavasta $\phi \Rightarrow \psi$ saa päätellä kaavan $\exists x \phi \Rightarrow \psi$ (tai $\phi \Rightarrow \forall x \psi$), *kunhan* muuttujasymboli x ei esiinny vapaana kvantifioinnin ulkopuolelle jäävässä osassa ψ (tai ϕ)".

    Varsinkin kvanttoreita koskevissa päättelyaskelissa esiintyy tällaisia *reunaehtoja (side conditions)*.

Hilbert-järjestelmässä on

- *helppoa* todistaa *yleisiä* tuloksia todistamisen käsitteestä — mikä olikin Hilbertin tavoite
- *vaikeaa* keksiä (mekaanisesti) *yksittäisiä* todistuksia — mikä taas on tekoälyn tarvitsema työkalu.

  Tehtävä "yritä todistaa ϕ" on "yritä purkaa ϕ käyttäen päättelysääntöjä *takaperin* kunnes kohtaat päättelyaksioomien variantteja".

Todistuksen etsintää on vaikeaa ohjata, koska ei ole tietoa millaisia variantteja kohden kannattaisi pyrkiä.

Esimerkiksi lauselogiikalle täydellinen Hilbert-järjestelmä saadaan [Nv01, luku 2.5(b)]

aksioomina kaikki lauselogiikan lauseet muotoa

$$\mathbf{F} \Rightarrow \alpha$$

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta))$$

$$\alpha \wedge \beta \Rightarrow \alpha$$

$$\alpha \wedge \beta \Rightarrow \beta$$

$$\alpha \Rightarrow \alpha \vee \alpha$$

$$\alpha \Rightarrow \alpha \vee \beta$$

$$(\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma))$$

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha) \tag{39}$$

$$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)) \tag{40}$$

missä α, β ja γ ovat mielivaltaisia lauseita.

Negaatio $\neg\alpha$ tulkitaan nyt lyhenteeksi $\alpha \Rightarrow \mathbf{F}$.

Jokainen näistä muodoista on tautologinen ja esittää jotakin luontevaa järkeilyaskelta kuten "jos sekä α että β niin myös α yksinään".

päättelysääntönä modus ponens

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$$

missä tuttuun tapaan johtopäätös α on viivan alapuolella ja sen ehdot $\alpha \Rightarrow \beta$ ja β yläpuolella.

Todistus yksinkertaiselle väitteelle $A \Rightarrow A$ on mutkikas:

$$
\dfrac{\dfrac{\overline{(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))}\;(40); \alpha = \gamma = A, \beta = (A \Rightarrow A) \qquad \overline{A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)}\;(39); \alpha = A, \beta = (A \Rightarrow A)}{(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)} \qquad \overline{A \Rightarrow (A \Rightarrow A)}\;(39); \alpha = \beta = A}{A \Rightarrow A}
$$

5.3.2. Luonnollisen päättelyn järjestelmät

"Luonnollisen" päättelyn (Natural Deduction) järjestelmät [Nv01, luku 1.2] mallintavat sitä, miten ihminen rakentaa huolellisia matemaattisia todistuksia.

- *Tuontisäännöillä (introduction rules)* voidaan johtopäätökseen lisätä loogisia konnektiiveja:

$$
\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} \wedge I \qquad
\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \vee I_1 \qquad
\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \vee I_2 \qquad
\frac{\begin{matrix} [\alpha] \\ \vdots \\ \beta \end{matrix}}{\alpha \Rightarrow \beta} \Rightarrow I \tag{41}
$$

  Tuontisäännöt löydetään miettimällä konnektiivien merkityksiä.

- Säännössä (41) tehtiin *oletus (assumption)* α, jonka avulla voitiin todistaa β.

  Tämä oletus täytyy myös *purkaa (discharge)* tyytymällä heikompaan johtopäätökseen "jos α niin β".

  Nyt luvun 5.3.1 patologinen todistusesimerkki on suoraan

$$
\frac{\overset{1.}{[A]}}{A \Rightarrow A} \Rightarrow I, 1.
$$

  missä on osoitettu purettava oletus indeksoimalla; suuressa todistuksessa voi olla useita eri *avoimia (open)* oletuksia purkua odottamassa.

- Kvanttoreille tuontisäännöt ovat [Nv01, luku 4.1(b)]:

  Universaalikvanttorille sääntö

$$
\frac{\mathrm{subst}(\{x/y\}, \alpha)}{\forall x \alpha} \forall I
$$

missä $\mathrm{subst}(\{x/y\}, \alpha)$ tarkoittaa sellaista kaavaa, joka saadaan korvaamalla kaavassa α jokainen muuttujasymbolin x vapaa esiintymä muuttujasymbolin y esiintymällä.

Tämä on syntaktinen vastine luvun 5.2.2 semanttiselle operaatiolle $[x = \ldots]$.

Reunaehtona y ei saa esiintyä vapaana johtopäätöksessä $\forall x \alpha$ eikä missään oletuksessa josta ehto $\mathrm{subst}(\{x/y\}, \alpha)$ pääteltiin.

Reunaehtoon käy esimerkiksi sellainen y jota ei ole ennen käytetty.

Eksistenssikvanttorille sääntö

$$\frac{\mathrm{subst}(\{x/t\}, \alpha)}{\exists x \alpha} \exists I$$

missä t on mielivaltainen termi.

- Vastaavasti turhia konnektiiveja voidaan hävittää ehdoista *poistosäännöillä (elimination rules):*

$$\frac{\alpha \wedge \beta \qquad \begin{matrix}[\alpha, \beta] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma} \wedge E$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\beta] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma} \vee E \tag{42}$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha \qquad \begin{matrix}[\beta] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma} \Rightarrow E \tag{43}$$

$$\frac{\forall x \alpha \qquad \begin{matrix}[\mathrm{subst}(\{x/t\}, \alpha)] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma} \forall E$$

$$\frac{\exists x \alpha \qquad \begin{matrix}[\mathrm{subst}(\{x/y\}, \alpha)] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma} \exists E \tag{44}$$

Eksistenssikvanttorin poistosäännöllä (44) on reunaehto, että y ei saa esiintyä vapaana ehdoissa $\exists x \alpha$ ja γ eikä missään muussa oletuksessa kuin $\mathrm{subst}(\{x/y\}, \alpha)$.

Poistosäännöt löydetään kumoamalla tuontisääntöjä.

Esimerkiksi disjunktion poistosääntö (42) on kuitenkin hankala todistuksen etsinnässä: millaiset oletukset α ja β kannattaisi tehdä, kun tiedetään vain haluttu johtopäätös γ?

Toisin sanoen, todistuksen etsinnässä *haarautumisaste on ääretön.*

Jos on päädytty valitsemaan tai kehittämään kokonaan uusi logiikka tietämyksen esittämiseen, niin sille lienee helpointa rakentaa todistusteoria aloittamalla luonnollisen päättelyn periaatteista.

Tarkastellaan seuraavaa päättelytehtävää [RN95, luku 9.2]:

"Amerikkalainen on rikollinen jos hän myy aseita vihamieliselle valtiolle. Vihamielisellä valtiolla Nono on ohjuksia. Kaikki sen ohjukset myi amerikkalainen eversti West.
Päättele tästä, että West on rikollinen."

Esitetään yksinkertaisuuden vuoksi päättely epäformaalisti, mutta kuitenkin niin tarkasti, että se voitaisiin myös formalisoida.

Aksiomatisoidaan ensiksi tietämys:

- "Amerikkalainen on rikollinen jos hän myy aseita vihamieliselle valtiolle."

$$\forall x, y, z.\, \mathrm{american}(x) \wedge \mathrm{weapon}(y) \wedge \mathrm{nation}(z) \wedge \\ \mathrm{hostile}(z) \wedge \mathrm{sells}(x, z, y) \Rightarrow \mathrm{criminal}(x) \tag{45}$$

- "Vihamielisellä valtiolla Nono on ohjuksia."

$$\mathrm{enemy}(\mathrm{Nono}, \mathrm{America}) \tag{46}$$

$$\mathrm{nation}(\mathrm{Nono}) \tag{47}$$

$$\exists x.\, \mathrm{owns}(\mathrm{Nono}, x) \wedge \mathrm{missile}(x) \tag{48}$$

- "Kaikki sen ohjukset myi amerikkalainen eversti West."

$$\text{american}(\text{West}) \tag{49}$$

$$\forall x.\, \text{owns}(\text{Nono}, x) \wedge \text{missile}(x) \Rightarrow \text{sells}(\text{West}, \text{Nono}, x) \tag{50}$$

- Ja vielä:

$$\forall x.\, \text{missile}(x) \Rightarrow \text{weapon}(x) \tag{51}$$

$$\forall x.\, \text{enemy}(x, \text{America}) \Rightarrow \text{hostile}(x) \tag{52}$$

$$\text{Nation}(\text{America}) \tag{53}$$

Voidaan päätellä seuraavin askelin:

1. Aksioomasta (48) saadaan eksistenssikvanttorin poistosäännöllä

$$\text{owns}(\text{Nono}, \text{M1}) \wedge \text{missile}(\text{M1})$$

koska

$$\frac{(48) \quad \begin{matrix}[\text{owns}(\text{Nono}, \text{M1}) \wedge \text{missile}(\text{M1})] \\ \text{owns}(\text{Nono}, \text{M1}) \wedge \text{missile}(\text{M1})\end{matrix}}{\text{owns}(\text{Nono}, \text{M1}) \wedge \text{missile}(\text{M1})} \exists E$$

kun valitaan uusi ennen käyttämätön muuttujasymboli $y = \text{M1}$.

2. Askeleesta 1 saadaan konjunktion poistolla kaavat

$$\text{owns}(\text{Nono}, \text{M1}) \tag{54}$$

$$\text{missile}(\text{M1}) \tag{55}$$

koska esimerkiksi

$$\frac{1 \quad \begin{matrix}[(54), (55)] \\ (54)\end{matrix}}{(54)} \wedge E.$$

3. Aksioomasta (51) saadaan universaalikvanttorin poistolla

$$\text{missile}(\text{M1}) \Rightarrow \text{weapon}(\text{M1})$$

koska

$$\frac{(51) \quad \begin{matrix}[\text{missile}(\text{M1}) \Rightarrow \text{weapon}(\text{M1})] \\ \text{missile}(\text{M1}) \Rightarrow \text{weapon}(\text{M1})\end{matrix}}{\text{missile}(\text{M1}) \Rightarrow \text{weapon}(\text{M1})} \forall E$$

kun valitaan nokkelasti *sama* $t = \text{M1}$ kuin askeleessa 1.

Nyt näin voidaan tehdä, koska tällä päättelyaskeleella ei ole reunaehtoja.

Miten tietokone tämän keksisi?

4. Kaavasta (55) ja askeleesta 3 saadaan päättelysäännöllä Modus Ponens

$$\text{weapon}(\text{M1})$$

koska Modus Ponens

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} MP$$

on implikaation poistosäännön (43) erikoistapaus $\gamma = \beta$:

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha \quad \begin{matrix}[\beta] \\ \beta\end{matrix}}{\beta} \Rightarrow E$$

Siis Modus Ponens on järjestelmän *luvallinen (admissible) johdettu* päättelysääntö.

5. Aksioomasta (50) saadaan universaalikvanttorin poistolla

$$\text{owns}(\text{Nono}, \text{M1}) \wedge \text{missile}(\text{M1}) \\ \Rightarrow \text{sells}(\text{West}, \text{Nono}, \text{M1}).$$

6. Askelista 5 ja 1 saadaan päättelysäännöllä Modus Ponens

$$\text{sells}(\text{West}, \text{Nono}, \text{M1}).$$

7. Aksioomasta (45) saadaan kolmen universaalikvanttorin poistolla

$$\text{american}(\text{West}) \wedge \text{weapon}(\text{M1}) \wedge \text{nation}(\text{Nono}) \wedge \\ \text{hostile}(\text{Nono}) \wedge \text{sells}(\text{West}, \text{Nono}, \text{M1}) \Rightarrow \\ \text{criminal}(\text{West})$$

8. Aksioomasta (52) saadaan universaalikvanttorin poistolla

$$\text{enemy}(\text{Nono}, \text{America}) \Rightarrow \text{hostile}(\text{Nono})$$

9. Aksioomasta (46) ja askeleesta 8 saadaan päättelysäännöllä Modus Ponens

$$\text{hostile}(\text{Nono}).$$

10. Aksioomista (49) ja (47) sekä askelista 4, 6 ja 9 saadaan konjunktion tuonneilla

$$\begin{aligned}&\text{american}(\text{West}) \wedge \text{weapon}(\text{M1}) \wedge \text{nation}(\text{Nono}) \wedge \\ &\text{hostile}(\text{Nono}) \wedge \text{sells}(\text{West}, \text{Nono}, \text{M1})\end{aligned}$$

koska esimerkiksi

$$\frac{(49) \quad 4}{(49) \wedge 4} \wedge I.$$

11. Askelista 7 ja 10 saadaan vihdoin päättelysäännöllä Modus Ponens haluttu lopputulos

$$\text{criminal}(\text{West}).$$