

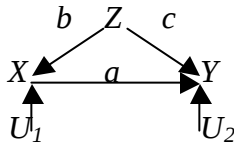
**MIKSI SEKOITTUMISELLE EI OLE OLEMASSA TILASTOLLISTA TESTIÄ,
MIKSI MONET USKOVAT ETTÄ ON JA MIKSI HE OVAT LÄHES OIKEASSA**

Jaakko Kuorikoski
Kausaalimallien tutkimusseminaari
26.2.2003

1. Sekoittuminen

Sekoittuminen on ehkäpä perustavin ongelma, joka estää ongelmattoman päättelyn tilastollisesta riippuvuudesta kausaalisuhteeseen. Jos tavoitteena on määrittää tekijän (kausaallinen) vaikutus toiseen tekijään tarkastelemalla näiden tekijöiden välistä tilastollista riippuvuutta, niin kolmannen tekijän vaikuttaessa näihin kumpaankin tekijään ovat arviot kausaalisesta vaikutuksesta harhaisia, *sekoittuneita*. Ts. X ja Y ovat sekoittuneita, jos on olemassa muuttuja Z , joka vaikuttaa sekä X :ään että Y :hyn. Z on tällöin X :n ja Y :n sekoittaja. Esimerkiksi R. A. Fisherin kuuluisa argumentti tupakoinnin haitallisuutta vastaan perustui sekoittumisen mahdollisuudelle; vaikka tupakointi ja keuhkosityöpä korreloivatkin vahvasti, ei tästä voida tehdä kausaalisia johtopäätöksiä, koska on mahdollista, että tupakoinnilla ja keuhkosityöväällä on yhteinen altistava (geneettinen) tekijä.

Tarkastellaan seuraavaa yksinkertaista esimerkkiä sekoittumisesta, joka voisi kuvata Fisherin esittämää tilannetta:



$$X = bZ + U_1$$

$$Y = aX + cZ + U_2,$$

missä rakenteelliset parametrit $(a, b$ ja $c)$ kuvaavat kausaalisien vaikutuksen vahvuutta eli seuraus-muuttujan muutoksen suhdetta interventiolla aikaansaatuun syy-muuttujan muutokseen ($a = \frac{\partial E[Y|do(x)]}{\partial x}$ jne.). Kyseisessä tapauksessa (olettaen, että virhetermit ovat normaalisti jakautuneita) a :n harhattoman estimaattorin voidaan osoittaa olevan osittaisregressiotekijä $r_{YX \cdot Z}$, joka saadaan X :n kertoimesta tehtäessä Y :n regressio X :llä ja Z :llä ($y = ax + bz + u$, missä $a = r_{YX \cdot Z}$). Pelkkä X :n regressiokerroin Y :lle on näin harhainen estimaattori rakenteellisesta parametrasta a , ja harhan suunta riippuu b :stä ja c :stä.

Miksi sekoittumiselle ei ole olemassa *puhtaasti* tilastollista testiä? Tähän kysymykseen voidaan vastata hyvin lyhyesti: koska sekoittuminen on kausaalinen käsite, on sillä näin muuttujien aktuaalisten jakaumien ylittävää kontrafaktuaalista tai modaalista sisältöä. Jos muuttaisimme interventiolla sekoittavan muuttujan arvoa, muuttuisi sekoitettujen muuttujien yhteisjakauma jollakin tavalla. Vaikka kausaalikäsitteiden eksplisiittistä käyttöä karsastetaankin yleisesti tilastollisia menetelmiä käyttävien tieteiden piirissä, on sekoittumisen mahdollisuus huomioitava jollakin tavoin. Pearl'n projektina onkin antaa sekoittumiselle täsmällinen määritelmä eksplisiittisesti kausaalisia käsitteitä hyväksikäyttäen ja selvittää, millainen aineistoa edeltävä kausaalinen informaatio mahdollistaa sekoittumisen tilastollisen testaamisen. Lähtökohta on seuraava, kirjallisuudessa yleisesti hyväksytty kriteeri:

Riippumattomuuskriteeri:

Muuttujat X ja Y eivät ole sekoittuneet, joss jokainen muuttuja Z , johon X ei vaikuta, on joko

(E1) riippumaton X :stä tai

(E2) riippumaton Y :stä, ehdollistettuna X :llä.

Riippuvuudella ei tässä ole kausaalisia konnotaatioita, vaan se tulee ymmärtää puhtaasti tilastollisena suhteena. Riippumattomuuskriteeri ei kuitenkaan ole puhtaasti tilastollinen, koska siinä esiintyvä ehto, jonka mukaan X ei vaikuta Z :aan, on kausaalinen. Pearl'n tuloksena on, että riippumattomuuskriteeri ei ole riittävä eikä välttämätön ehto kausaalisten vaikutusten harhattomille estimaateille. Otettaessa käyttöön vahvempi *stabiilin harhattomuuden* käsite, voidaan osoittaa yhteys tämän vahvemman harhattomuuden ja sopivalla tavalla muokatun riippumattomuuskriteerin kanssa.

2. SEKOITTUMATTOMUUS KAUSAALISENA KÄSITTEENÄ

Määritellään aluksi se, mitä haetaan takaa:

(SK) Sekoittumattomuus – kausaalinen määritelmä

Olk. M havainnot tuottavan prosessin kausaalinen malli. $P(y|do(x))$ on vastetapahtuman $Y = y$ todennäköisyys hypoteettisen intervention $X = x$ tapauksessa mallissa M . X ja Y eivät ole sekoittuneet (mallin M mukaan), joss

$$P(y|do(x)) = P(y|x), \text{ kaikille } x \text{ ja } y.$$

Intuitio SK:n takana on selkeä: jos X :llä ja Y :llä ei ole yhteisiä vaikuttavia tekijöitä, niin silloin X :n ja Y :n välillä ei vallitse ei-kausaalisia päättelysuhteita, joita interventio katkaisisi. Näin $P(y|x)$:n kannalta on samantekevää, havaitaanko X :n arvo, vai asetetaanko se interventiolla. $P(y|do(x))$:n voi myös tulkita $Y = y$:n ehdolliseksi todennäköisyydeksi satunnaistetussa kontrolloidussa kokeessa; satunnaistaminen sulkee pois mahdollisuuden, että yksittäisen koeyksikön ominaisuuksilla $X = x$ ja $Y = y$ olisi yhteinen syy, jolloin $X = x$ ikään kuin asetetaan systeemin ulkopuolelta.

Unohdetaan yksinkertaisuuden vuoksi aikaisemmasta esimerkistämme virhetermit, jolloin malli on muotoa

$$X = bZ$$

$$Y = aX + cZ.$$

Intervention $do(x)$ jälkeinen malli taas on

$$X = x$$

$$Y = ax + cZ.$$

$$\text{Nyt } E[Y|do(x)] = ax + cE[Z] \stackrel{1}{=} (a + c/b)x = E[Y|x].$$

Jos saatavilla on tilastollisen aineiston lisäksi kvalitatiiviset kausaaliset oletukset kiteyttävä kausaalinen kaavio (ts. tiedämme mikä muuttuja vaikuttaa mihinkin), voidaan kausaalisten vaikutusten estimaattoreiden mahdollinen harhattomuus lukea suoraan kaaviosta. Tämä *takaovi –kriteerin* nimeä kantava testi perustuu *d-erotus –kriteeriin*, joka ilmaisee tavan, jolla kausaalisen mallin muuttujien yhteisjakauman tulee suhteutua kausaaliset suhteet ilmaisevaan nuolikaavioon.

D-erotus –kriteeri:

Kaavion polku p on d-erotettu solmujoukolla Z , jos ja vain jos

- i) p sisältää ketjun $i \Rightarrow m \Rightarrow j$ tai haarukan $i \leq m \Rightarrow j$ s.e. m kuuluu Z :aan, tai*
- ii) p sisältää käänteisen haarukan (v-rakenteen) $i \Rightarrow m \leq j$ s.e. m tai mikään m :n jälkeläisistä ei kuulu Z :aan.*

Joukko Z d-erottaa X :n Y :stä jos ja vain jos Z d-erottaa kaikki polut X :n solmuista Y :n solmuihin.

(Verma & Pearl 1988): Jos Z d-erottaa X :n Y :stä kaaviossa G , niin X on riippumaton Y :stä ehdolla Z kaikissa G :n kanssa yhteensopivissa jakaumissa. Kääntäen, jos Z ei d-erota X :ää ja Y :tä kaaviossa G , niin X ja Y ovat riippuvaisia ehdolla Z lähes kaikissa G :n kanssa yhteensopivissa jakaumissa.

D-erotus on se taikaliima, joka liittää kausaaliset (funktionaaliset) mallit, mallien generoimat muuttujien yhteisjakaumat ja nuolikaaviot toisiinsa. D-erotukseen ja sen intuitiiviseen merkitykseen palataan (toivottavasti) myöhemmin. Tavoitteena on nyt selvittää, milloin kausaalinen vaikutus $P(y|do(x))$ tai vastaava rakenteellinen parametri on estimoitavissa havaittavien muuttujien otosjakaumasta, kun tilanteen kausaalinen kaavio on jo selvillä.

Takaovi-kriteeri:

Muuttujajoukko Z täyttää takaovi-kriteerin suhteessa järjestettyyn muuttujapariin (X,Y) kaaviossa D , jos

- i) yksikään X :n solmu ei ole X :n kausaalinen jälkeläinen ja*
- ii) Z d-erottaa jokaisen X :n ja Y :n välisen polun, joka sisältää nuolen X :ään.*

Takaovi-kriteeri yleistyy myös tilanteeseen, jossa X ja Y ovat muuttujajoukkoja. Jos kaaviosta löytyy takaovi-kriteerin täyttävä Z , jonka jakauma tunnetaan, on X :n kausaalinen vaikutus Y :hyn laskettavissa. Takaovi-kriteeriä sovelletaan sekoittumisen tapauksessa seuraavalla tavalla: poimitaan kaaviosta kaikki sellaiset X :n ja Y :n väliset polut, jotka sisältävät nuolen X :ään (kaikki polut, jotka päätyvät X :ään ikäänkuin takaoven kautta). Jos kaikki takaovi-polut sisältävät “törmääjän”, ts. kaksi nuolta, jotka osoittavat samaan solmuun, ovat X ja Y sekoittumattomia. Tällaisessa tilanteessa mikään muuttujajoukko ei täytä takaovi-kriteeriä, jolloin muita muuttujia ei tarvitse ottaa huomioon arvioitaessa X :n kausaalista vaikutusta Y :hyn.

3. RIIPPUMATTOMUUSKRITERIN ONGELMAT

Käytännössä valmista kausaalista kaaviota ei tietenkään ole saatavilla; aineistoa edeltävä teoria tai koejärjestely on harvoin niin vahva, että muuttujien väliset kausaalisuhteet olisivat jo selvillä ja vaikutusten vahvuus ainoa mielenkiinnon kohde. Mielenkiintoista onkin, kuinka pitkälle pelkällä tilastollisella aineistolla päästään. Muotoillaan seuraavaksi täsmällisempi ehdokas tilastolliselle sekoittumattomuuden kriteerille.

(SR) Sekoittumattomuus – riippumattomuuskriteeri

Olk. T muuttujajoukko, johon X ei vaikuta. X ja Y eivät ole sekoittuneet T :n ollessa läsnä, jos kaikille $Z \hat{I} T$ pätee toinen seuraavista ehdoista:

$$(E1) \quad P(x|z) = P(x)$$

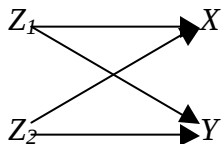
$$(E2) \quad P(y|z,x) = P(y|x)$$

Vastaavasti X ja Y ovat sekoittuneet, jos jokin $Z \in K$ ei täytä kumpaakaan edellä esitetyistä ehdoista.

Kriteerin voidaan sanoa olevan riittävä, jos se ei koskaan virheellisesti luokittele tapausta sekoittumattomaksi. Vastaavasti kriteeri on välttämätön, jos se ei koskaan virheellisesti luokittele tapausta sekoittuneeksi. Pearl osoittaa seuraavien vastaesimerkkien avulla, ettei (SR) ole sen enempää riittävä kuin välttämätönkään.

i) Reunajakaumat eivät aina riitä

(SR) perustuu yksittäisten tekijöiden huomioon ottamisen vaikutukseen Y :n jakaumaan - jokaista potentiaalista sekoittajamuuttujaa tarkastellaan erikseen. Kuitenkin kaksi muuttujaa voi yhdessä sekoittaa X :n ja Y :n, vaikka kumpikin erikseen tarkasteltuna täyttäisi $E1$:n tai $E2$:n. Tarkastellaan seuraavaa tilannetta



Missä Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia kolikonheittoja ja $X = 1$ joss $Z_1 = Z_2$ (muuten $X = 0$) ja $Y = 1$ joss $Z_1 \neq Z_2$ (muuten $Y = 0$). Nyt X ja Y ovat täydellisesti käänteisesti korreloituneita. X ja Y eivät kuitenkaan vaikuta kausaalisesti toisiinsa. Kuitenkin joko pelkän Z_1 :n tai Z_2 :n arvon tietäminen ei muuta X :n tai Y :n jakaumaa ($E(X) = E(Y) = 1/2$), joten Z_1 ja Z_2 täyttävät kukin erikseen (SR):n ehdot, ja tapaus (SR):n mukaan virheellisesti sekoittumaton.

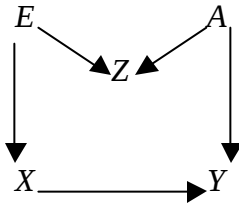
Esimerkki osoittaa myös, miksi saattaa olla harhaanjohtavaa puhua sekoittajista sekoittumisen sijaan. Sekoittuminen on ensisijaisesti rakenteen piirre, ei yksittäisten kausaalisten tekijöiden ominaisuus tai kyky.

ii) Kaikkia potentiaalisia sekoittajia ei tunneta

SR nojaa oletukseen, jonka mukaan T sisältää kaikki tapauksen potentiaaliset sekoittajat. Käytännössä tästä ei voida koskaan olla varmoja, joten itse asiassa mikään tilastollinen testi ei voi olla riittävä. Tämä vasta-argumentti on kyllä pätevä, mutta ei ilmeisyydessään kovin rakentava.

iii) Kausaalisesti vaikuttamattomat proksit

Tarkastellaan seuraavaa tilannetta



missä koulutus E vaikuttaa altistumiseen X , joka vaikuttaa sairauteen Y , johon vaikuttaa lisäksi ikä A . Sekä koulutus ja ikä vaikuttavat lisäksi henkilön omistaman auton tyyppiin Z . Koska Z on koulutuksen E indikaattori, on se myös korreloitunut altistumisen X kanssa. Toisaalta Z on myös iän A indikaattori ja siten korreloitunut sairauden Y kanssa. Näin Z rikkoo sekä $E1:n$, että $E2:n$. Kuitenkaan henkilön omistaman auton tyyppi ei (oletuksen mukaisesti) vaikuta kausaalisesti sen paremmin altistumiseen kuin sairauteenkaan, joten Z ei ole $X:n$ ja $Y:n$ sekoittaja. Se, että esitetty malli todella täyttää $SK:n$ ($P(Y|X) = P(Y|do(X))$), voidaan osoittaa soveltamalla takaovi-kriteeriä (Z ei d -erota ainoaa polkua $X:n$ ja $Y:n$ välillä, joka sisältää X :ään kohdistuvan nuolen.) Näin SK ei myöskään ole välttämätön ehto (kausaaliselle) sekoittumiselle, ts. vaikka vaikka jokin muuttuja (tai muuttujajoukko) rikkoisi esitetyn tilastollisen riippumattomuuskriteerin (SK), ei tästä voida vielä päätellä, että kyseinen muuttuja olisi sekoittaja. Kyseinen tapaus osoittaa, miten mahdollisten sekoittajien huomioimisessa tulee olla tarkkana, koska jos Z :aa luullaan virheellisesti $X:n$ ja $Y:n$ sekoittajaksi ja otetaan siten huomioon kausaalista vaikutusta estimoitaessa, ovat saadut estimaatit yleensä harhaisia.

Edeltävä esimerkki osoitti jälleen kerran varsinaista aineistoa edeltävän kausaalisen informaation korvaamattomuuden; harkittaessa kausaalisten vaikutusten estimaattoreiden ehdollistamista mahdollisilla sekoittajilla, on kyseisten muuttujien kausaalisista ominaisuuksista jo oltava jonkinlainen näkemys. Tämän opetuksen perusteella voidaan tilastollista riippumattomuuskriteeriä yrittää muokata siten, etteivät kausaalisesti vaikuttamattomat proksit enää muodostaisi ongelmaa. Luonnollinen ratkaisu onkin vaatimus, jonka mukaan potentiaalisten sekoittajien on edeltävän tiedon valossa edes mahdollista vaikuttaa kiinnostuksen kohteena oleviin muuttujiin:

(SR2) Sekoittumattomuus – muokattu riippumattomuuskriteeri

Olk. T muuttujajoukko, johon X ei vaikuta, mutta joka voisi mahdollisesti vaikuttaa Y :hyn. X ja Y eivät ole sekoittuneet T :n ollessa läsnä, jos kaikille $Z \in T$ pätee toinen seuraavista ehdoista:

$$(U1) \quad P(x|z) = P(x)$$

$$(U2) \quad P(y|z,x) = P(y|x)$$

Vastaavasti X ja Y ovat sekoittuneet, jos jokin $Z \in T$ ei täytä kumpaakaan edellä esitetystä ehdoista.

Kuitenkaan SR2:kaan ei mahda mitään tilanteille, joissa onnekkain parametrisaation ansiosta $P(y|do(x)) = P(y|x)$, vaikka olisikin olemassa muuttua Z , joka rikkoo kumpaakin SR2:n ehdoista. Tarkastellaan ensimmäisen esimerkin mukaista tilannetta, jossa X :n ja Y :n virhetermit ovat kuitenkin korreloituneita ja $cov(u_1, u_2) = r$. Nyt voidaan osoittaa, että nk. standardisoiduilla muuttujilla Y :n regressio X :llä antaa a :n estimaatiksi $(a + r + bc)$. Jos r sattuu olemaan yhtäsuuri kuin $-bc$, tarjoaa yksinkertainen regressio harhattoman estimaatin X :n kausaalisesta vaikutuksesta Y :hyn ($a = \mathbb{E}[Y|do(x)] - \mathbb{E}[Y]$). X ja Y ovat näin sekoittumattomia, vaikka SR2 toisin väittääkin. Tämä harhattomuus on kuitenkin hyvin kontekstiherkkä ilmiö ja onkin epätodennäköistä, että rakenne pysyisi sekoittumattomana

tutkimusasetelmaa muutettaessa (esim. toistettaessa tilastollinen tutkimus uudella populaatiolla).

4. STABIILI SEKOITTUMATTOMUUS

Autotyypin ja sairauden tapauksessa sekoittumattomuus on riippumaton mallin parametrien täsmällisistä arvoista. Pearl kutsuu tällaista, suoraan mallin kausaalisesta kaaviosta luettavissa olevaa, parametreista riippumatonta estimaattoreiden harhattomuutta *stabiiliksi harhattomuudeksi*:

(SH) Stabiili harhattomuus

Olk. A joukko oletuksia havainnot tuottavasta prosessista ja C_A niiden kausaalisten mallien joukko, joka täyttää A :n. X :n kausaalisen vaikutuksen Y :hyn estimaatti on stabiilisti harhaton oletuksella A , jos $P(y|do(x)) = P(y|x)$ kaikissa $M \in C_A$. Tällöin vastaavasti X ja Y ovat stabiilisti sekoittumattomat.

Määritelmässä esiintyvät oletukset voivat koskea parametreja (esim. nolla-rajoitukset), muuttujien (yleensä virhetermien) jakumia tai kausaalisen mallin konstituovien funktioiden muotoa (esim. lineaarisuusoletukset). Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa oletukset koskevat ainoastaan kausaalisen kaavion topologista rakennetta - nuolikaavion muotoa.

(RSS) Rakenteellisesti stabiili sekoittumattomuus

Olk. A_D kausaaliseen kaavioon D sisältyvät kausaaliset oletukset. X ja Y ovat stabiilisti sekoittumattomat oletuksella A_D , jos $P(y|do(x)) = P(y|x)$ pätee kaikilla D :n parametrisaatioilla - ts. olivat kaaviota vastaavan mallin funktiot ja virhetermien jakaumat millaisia tahansa.

Kun kaavio D ei sisällä kehiä, voidaan takaovi-kriteerin avulla johtaa yksinkertainen riittävä ja välttämätön ehto rakenteellisesti stabiilille sekoittumattomuudelle:

(YSP) Yhteisen syyn periaate

Olk. A_D kausaaliseen kaavioon D sisältyvät kausaaliset oletukset. Muuttujat X ja Y ovat stabiilisti sekoittumattomat oletuksella A_D joss X :llä ja Y :llä ei ole yhteisiä kausaalisia esiisiä kaaviossa D .

YSP kuitenkin edellyttää jälleen, että täydellinen kausaalinen kaavio on saatavilla. Kaiken lisäksi YSP on niin ilmeinen, että sitä voisi pitää lähes tautologiana (X :llä ja Y :llä ei ole yhteisiä syitä joss niillä ei ole yhteisiä syitä). YSP:n avulla voidaan kuitenkin muotoilla stabiilille rakenteelliselle sekoittumattomuudelle testi, joka edellyttää koko kaavion tuntemisen sijasta vain, että pystymme olettamaan jokaisesta muuttujasta Z sen, että Z ei vaikuta Y :hyn ja vaikuttaako X Z :aan. Yhdessä tilastollisen aineiston kanssa, tarjoaa tämä informaatio Pearl'n mukaan välttämättömän kriteerin rakenteellisesti stabiilille sekoittumattomuudelle:

(OSS) Operationaalinen testi stabiilille sekoittumattomuudelle

Olk. A_Z olettamus, jonka mukaan i) havainnot tuottaa prosessi, joka voidaan mallintaa jollakin kehättömällä mallilla M ja ii) Z on sellainen M :n muuttuja, johon X ei vaikuta, mutta joka voi mahdollisesti vaikuttaa Y :hyn (ts. A_Z ei sisällä oletusta, jonka mukaan Z ei vaikuta Y :hyn). Jos Z rikkoo molemmat riippumattomuuskriteerin SR ehdoista U_1 ja U_2 , niin X ja Y eivät ole stabiilisti sekoittumattomia oletuksella A_Z .

Yhdenkin edellä määritellyn Z :n löytäminen riittää siis kumoamaan väitteen, jonka mukaan X ja Y ovat stabiilisti sekoittumattomat. X ja Y voivat kuitenkin edelleen olla sattumalta sekoittumattomat kyseisessä tilanteessa (ts. tilannetta kuvaavassa mallissa parametrit sattuvat olemaan sellaiset, että kausaalisen vaikutuksen estimaattorin harhattomuus kumoutuu.)