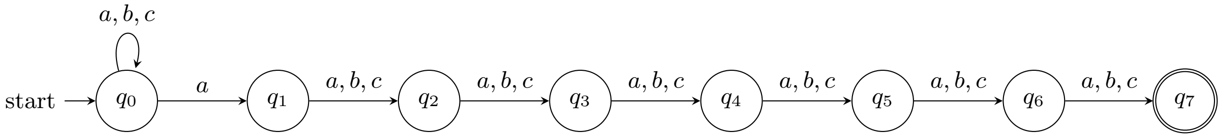
582206 Laskennan mallit (syksy 2014, Tomi Pasanen)
1. kurssikoe 23.10.2014
Esimerkkiratkaisuja, Sandra Luhtaniemi ja Titti Malmivirta

1.

a) Esitä kaaviona äärellinen epädeterministinen automaatti aakkoston $\Sigma = \{a, b, c\}$ kielelle, joka koostuu sanoista, joissa seitsemänneksi viimeinen merkki on a.

b) Esitä kontekstiton(yhteydetön) kielioppi kielelle $\{1^n 0^k 1^m \mid n, k, m \in \mathbb{N}_0 \text{ ja } k = n + m\}$.

Ratkaisu (a).

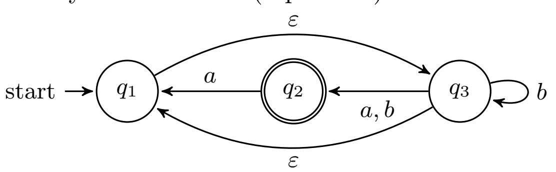


Ratkaisu (b).

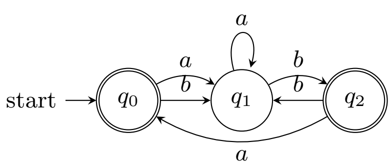
$$
\begin{array}{lcll}
S & \to & S_1 S_2 & \\
S_1 & \to & 0 S_1 1 & \mid \ \varepsilon \\
S_2 & \to & 1 S_2 0 & \mid \ \varepsilon
\end{array}
$$

2.

a) Muunna seuraava epädeterministinen äärellinen automaatti deterministiseksi (1 piste) soveltaen kurssilla esitettyä menetelmää (2 pistettä):

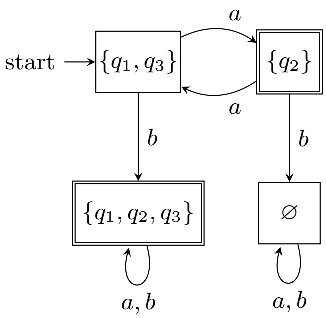


b) Käytä kurssilla kuvailtua menetelmää ja muunna olla oleva automaatti säännölliseksi ilmaukseksi (1 piste). Esitä alkuperäisestä automaatista muokattu yleistetty äärellinen automaatti (GNFA) ja välivaiheet muunnoksessa (2 pistetä).

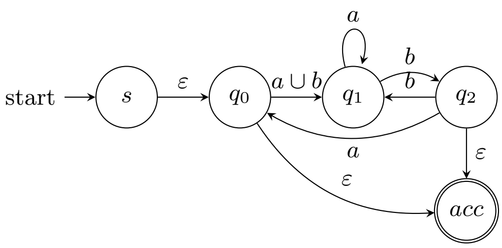


Ratkaisu (a).

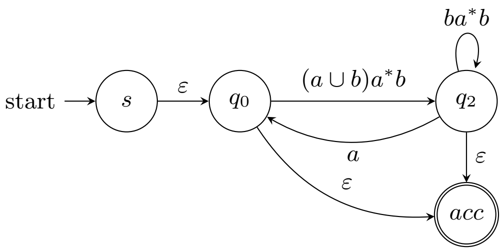
Uuden automaatin aloitustila on tila, joka vastaa sitä tilojen potenssijoukon joukkoa, joka sisältää aloitustilan sekä kaikki ne tilat, joihin aloitustilasta pääsee ε-siirtymällä. Hyväksyviä tiloja ovat alkuperäisen automaatin hyväksyvää tilaa vastaava tila, sekä ne tilat, jotka sisältävät hyväksyvän tilan.



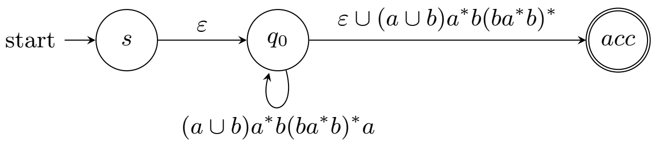
Ratkaisu (b).
Lisätään kaksi uutta tilaa uusi alkutila s ja uusi hyväksyvä tila acc. Lisätään uudesta aloitustilasta ε-siirtymä alkuperäiseen aloitustilaan, ja alkuperäisistä hyväksyvistä tiloista ε-siirtymät uuteen hyväksyvään tilaan. Muutetaan alkuperäiset hyväksyvät tilat ei-hyväksyviksi. Eliminoidaan alkuperäisen automaatin tilat yksitellen, ja korvataan niiden väliset siirtymät säännöllisillä lausekkeilla kurssilla esitettyjen sääntöjen mukaisesti.



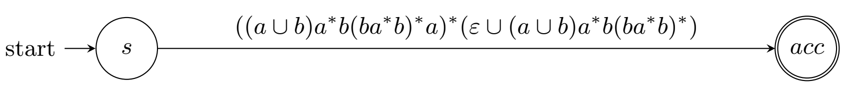
Eliminoidaan aluksi tila q_1:



Eliminoidaan seuraavaksi tila q_2:



Eliminoidaan lopuksi vielä tila q_0.



Saatiin säännöllinen lauseke $((a \cup b)a * b(ba * b) * a) * (\varepsilon \cup (a \cup b)a * b(ba * b)*)$. Tilat voidaan eliminoida myös toisessa järjestyksessä, mutta lopullisesta säännöllisestä lausekkeesta voi tällöin tulla erilainen.

3.
a) Todista, että kieli $A = \{dda^m b^n c^k \mid m, n, k \in \mathbb{N}_0 \text{ ja } n = k\}$ ei ole säännöllinen kieli kun $\Sigma = \{a, b, c\}$.

b) Todista, että jos A ja B ovat kontekstittomia kieliä niin $A \cup B$ ja $A \circ B$ ovat kontekstittomia kieliä.

Ratkaisu (a) (Tapa 1).
Tehdään vastaoletus: kieli $A = \{dda^m b^n c^k \mid m, n, k \in \mathbb{N}_0, n = k\}$ on säännöllinen. Tällöin pumppauslemman nojalla on olemassa sellainen $p \in \mathbb{N}$, että jokainen $s \in A$, jolle $|s| \geq p$, voidaan jakaa kolmeen osaan $s = xyz$, siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. Kaikille $i \geq 0, xy^i z \in A$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

Olkoon $s = dda^0 b^p c^p = ddb^p c^p$. Nyt $s \in A$ ja $|s| \geq p$. Nyt s halutaan jakaa kaikilla mahdollisilla tavoilla osiin xyz ja todeta, että kaikilla mahdollisilla jaoilla $xy^i z \notin A$ jollakin $i \in \mathbb{N}$. Koska vaaditaan, että $|xy| \leq p$, tavat jakaa s jakautuvat kolmeen eri tapaukseen:

1. y sisältää pelkästään merkkejä d, $y = d^n$, missä $n = 1$ tai $n = 2$.
2. y sisältää sekä merkkejä d että b, $y = d^n b^m$, missä $0 < n \leq 2$, $0 < m \leq p - 2$
3. y sisältää pelkästään merkkejä b, $y = b^n$, missä $n \leq p - 2$, kuitenkin $n \geq 1$.

Tarkastellaan tapausta, missä $i = 2$. Nyt

1. $y^i = d^{2n}$. Jos $n = 1$, $s = dddb^p c^p \notin A$. Jos $n = 2$, $s = d^4 b^p c^p \notin A$.
2. $y^i = (d^n b^m)^2 = d^n b^m d^n b^m$, jolloin $xy^i z \notin A$, siis kielen merkkijonoissa ei voi olla kyseistä muotoa olevia osamerkkijonoja.
3. $y^i = b^{2n}$. Tällöin $s = ddb^{2n} b^{(p-n)} c^p = ddb^{(n+p)} c^p \notin A$.

On osoitettu, että kielellä A ei ole pumppausominaisuutta, mikä on ristiriita sen oletuksen kanssa, että A on säännöllinen. Vastaoletuksen on siis oltava väärä, joten A ei ole säännöllinen.

Ratkaisu (a) (Tapa 2). Kurssilla on osoitettu, että säänöllisen kielen L käänteiskieli L^R on myös säännöllinen. Kielen L käänteiskieli koostuu merkkijonoista, jotka ovat L:n merkkijonot käänteisessä järjestyksessä. Edelleen koska käänteiskielen käänteiskieli $(L^R)^R = L$, niin myös siitä, että L^R on säännöllinen, seuraa, että L on säännöllinen, joten L on säännöllinen täsmälleen silloin, kun L^R on säännöllinen..

Oletetaan siis, että A^R on säännöllinen. Tällöin sillä on jokin pumppauspituus p. Olkoon $s = c^p b^p add \in A^R$. Koska vaaditaan, että $|xy| \leq p$, tiedetään, että $y = c^m$, jollakin $0 \leq m < p$.

Merkitään $p = n + m + k$, missä $n, m, k \in \mathbb{N}$, ja $m \neq 0$. Nyt $x = c^n$, $y = c^m$ ja $z = c^k b^p add$, ja esimerkiksi tapauksessa, että $i = 0$, $xy^i z = c^n c^k b^p add = c^{n+k} b^p add \notin A^R$, sillä $n + k \neq p$.

Nyt on osoitettu, että kielellä A^R ei ole pumppausominaisuutta, joten se ei voi olla säännöllinen, mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siispä vastaoletus on väärä, joten kieli A^R ei voi olla säännöllinen, ja näin ollen myöskään A ei voi olla säännöllinen.

Arvostelusta. Täysiin pisteisiin ei vaadittu eksplisiittisiä laskuja siitä, että merkkijonon s muoto rikkoontuisi pumpattaessa, vaan riitti todeta, että jotakin tai joitakin merkkejä tulee liikaa/liian vähän, jos alimerkkijonoa y toistetaan tai se poistetaan eli pumpataan alaspäin. Kaikki tapaukset oli kuitenkin käsiteltävä. Siitä, että oli tarkastellut ylimääräisiä tai mahdottomia tapauksia, ei otettu pisteitä.
Kaksi pistettä sai, jos ymmärsi, että merkkijono s on valittava siten, että sen pituus on vähintään p, sillä pumppauslemma ei ota kantaa pumppauspituutta lyhyempiin merkkijonoihin. Lisäksi oli ymmärrettävä, että jakoa xyz ei voida valita, vaan on näytettävä, että kaikilla mahdollisilla jaoilla lauseen ensimmäinen ehto menee rikki.
Yhden pisteen sai, jos muisti pumppauslemman muotoilun tai oli valinnut sanan s siten, että sen avulla olisi voinut näyttää, että kielellä ei ole pumppausominaisuutta, ja aloittanut tapailemaan todistusta.

Ratkaisu (b).
Kontekstittoman kielen määritelmän mukaisesti kieli on kontekstiton, mikäli jokin kontekstiton kielioppi tuottaa sen. Koska A ja B ovat konstekstittomia, niille on olemassa kontekstittomat kieliopit siten, että $A = L(G_A)$ ja $B = L(G_B)$, missä $G_A = (V_A, \Sigma, R_A, S_A)$ ja $G_B = (V_B, \Sigma, R_A, S_A)$. Tarvittaessa voidaan vaihtaa kieliopin muuttuja symboleita niin, että $V_A \cap V_B = \varnothing$. Valitaan muuttuja S s.e. $S \notin V_A \cup V_B$. Kontruoidaan uudet kieliopit $G_{A\cup B}$ ja $G_{A\circ B}$ seuraavaan tapaan:

$G_{A\cup B} = \{V_A \cup V_B \cup \{S\}, \Sigma, R, S\}$, missä $R = R_A \cup R_B \cup \{S \to S_A \mid S_B\}$. Siis uuden kieliopin muuttujien joukko on yhdiste alkuperäisten kielten muuttujien joukoista, mihin on lisätty uusi symboli S, ja tämä on myös uuden kieliopin aloitussymboli. Sääntöjen joukkoon lisätään yksi uusi sääntö, $S \to S_A \mid S_B$. On selvää, että $A \cup B = L(G_{A\cup B})$

$G_{A\circ B} = \{V_A \cup V_B \cup \{S\}, \Sigma, R, S\}$, missä $R = R_A \cup R_B \cup \{S \to S_A S_B\}$. Sääntöjen joukkoon lisätään yksi uusi sääntö, $S \to S_A S_B$. On selvää, että $A \circ B = L(G_{A\circ B})$

Kielille $A \cup B$ ja $A \circ B$ saatiin konstruoitua kieliopit, jotka tuottavat nämä kielet. Koska A ja B olivat mielivaltaisia, niin väite pätee kaikille konstekstittomille kielille A ja B.

Arvostelusta. Täysiin pisteisiin riitti, että oli konstruoinut uuden kieliopin, lisännyt siihen uuden aloitusmuuttujan, ja ratkaisussa mainitut uudet säännöt. Myös huolellisesti konstruoidut pinoautomaatit hyväksyttiin. Kaksi pistettä sai, jos oli osannut esittää todistuksen vain jommallekummalle joukko-operaatiolle ja toiselle osittain. Kaksi pistettä sai myös huolellisesta luonnostelmasta ja sanallisesta perustelusta. Yhden pisteen sai luonnostelmasta, josta kävi ilmi todistuksen idea.