

Tehtävä 1

Laaditaan vaihe vaiheelta raa'an voiman approksimaatioalgoritmi euklidista ryvästysongelmaa varten. Oletetaan, että $\mathcal{R}$ on joukon X optimaalinen ryvästys.

1. Merkitään A :n alkioiden keskiarvopistettä $c(A)$. Mikä on osajoukon $A \in \mathcal{R}$ osuus ryvästyskustannuksista (kustannukset, kun A ryvästetään keskuksensa suhteen)?
2. Olkoon $k(A) \in A$ piste, joka on lähinnä A :n keskiarvopistettä $c(A)$. Miten voidaan arvioida neliöllistä etäisyyttä $\|c(A) - k(A)\|^2$ ylöspäin edellisen kohdan tuloksen avulla?
3. Palauta mieleen, että $\sum_{y \in A} \|x - y\|^2 = \sum_{y \in A} \|y - c(A)\|^2 + |A| \cdot \|x - c(A)\|^2$. Minkäläinen yläraja saadaan A :n osuudelle ryvästyskuluista, kun keskuksena on $k(A)$?
4. Millaisen ylärajan saat siis ryvästyskustannuksille, jos jokaisesta optimaalisesta rypäystä valitaan piste, joka on lähinnä keskiarvopistettä?
5. Oletetaan vielä, että $k = |\mathcal{R}|$ ja dimensio d ovat vakioita. Raa'an voiman algoritmi on viimeistelyä vaille valmis. Miten todetaan algoritmin polynomiaalinen aikavaativuus?

Tehtävä 2

Euklidisen ryvästysongelman NP-kovuustodistuksessa käytetään hyväksi arviota ryvästyskustannuksista, kun tiedetään, että kaikilla $x, y \in X$, $x \neq y$ pätee $\|x - y\| \geq r$. Oletetaan, että $|X| = n$ ja että haluttu rypäiden lukumäärä on k . Käytä hyväksi aputulosta

$$\phi(X) = \sum_{A \in \mathcal{R}} \sum_{x \in A} \|x - c(A)\|^2 = \sum_{A \in \mathcal{R}} \frac{1}{2|A|} \sum_{x, y \in A} \|x - y\|^2$$

ja määritä alaraja ryvästyskustannuksille edellisten oletusten ollessa voimassa. Voidaanko raja saavuttaa? Jos voidaan, milloin? Oletetaan, että verkolle on olemassa koodaus, jossa kahta solmua vastaavan pisteen etäisyys on r , jos solmujen välillä ei ole kaarta, ja $R > r$, jos solmujen välillä on kaari. Oivallatko äsken määritellyn alarajan yhteyden kolmiväritettävyysoingelman kanssa?

Tehtävä 3

Arttu Algoritmikko haluaa konstruoida kokeitansa varten n :n pisteen pistejoukon $X = A \cup B$ ($A \cap B = \emptyset$), jossa kahden ei-yhtäsuuren pisteen välinen etäisyys osajoukkojen A ja B sisällä on aina $\delta > 0$, mutta eri osajoukkoihin A ja B kuuluvien pisteiden väliset etäisyydet ovat aina $\Delta > \delta$. Miten tämä tehdään? *Vihje:* aseta pisteiden dimensioiksi $n + 2$. Aseta jokaisen pisteen kohdalla vain kahteen koordinaattiin nollasta poikkeava arvo.