Tutkimustiedonhallinnan peruskurssi

Hannu Toivonen, Marko Salmenkivi, Inkeri Verkamo
hannu.toivonen, marko.salmenkivi, inkeri.verkamo@cs.helsinki.fi

Helsingin yliopisto – Tietojenkäsittelytieteen laitos

Satunnaislukujen generointi

Lähteet

- Knuth, D., The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, luku 3
- Numerical Recipes in C, luku 7

Johdanto

- edellä olemme tutustuneet menetelmiin, jotka perustuvat satunnaislukujen generointiin
  - satunnaistustestaus: muodostetaan (kahden) otoksen permutaatioita
  - bootstrap: generoidaan pseudo-otoksia valitsemalla satunnaisesti alkioita otoksesta takaisinpanolla
  - Monte Carlo -testi usein: generoidaan arvoja tunnetusta populaatiojakaumasta

Johdanto (2)

- satunnaistus ja bootstrap edellyttävät satunnaislukujen generoimista tasaisesta jakaumasta
  - tasaisesti jakautuneiden satunnaislukujen generointiin ohjelmointikielissä kirjastofunktiot
- Monte Carlo -testauksen kohdalla populaatiojakauma voi luonnollisesti olla mikä tahansa jakauma
  - kuinka generoidaan satunnaislukuja muista kuin tasaisista jakaumista?
  - vaikka populaatiojakauma tunnettaisiinkin, ei välttämättä ole aivan suoraviivaista generoida siitä otoksia

Diskreettejä jakaumia

- satunnaismuuttuja X noudattaa aina jotakin todennäköisyysjakaumaa
- jos muuttujan arvot ovat diskreettejä jakauma on diskreetti
- diskreetin todennäköisyysjakauman määrittää pistetodennäköisyysfunktio $p(x)$, jolle $\sum_i p(i) = 1$
- keskeisiä diskreettejä jakaumia:
  - diskreetti tasainen jakauma
  - binomijakauma
  - Poisson-jakauma
  - geometrinen jakauma

Keskeisiä jatkuvia jakaumia

- muuttujan arvot jatkuvia $\rightarrow$ jakauma jatkuva
- jatkuvan jakauman määrittää tiheysfunktio $f(X = x)$, jolle $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- tiheysfunktion integraalifunktiota $F(x) = P(X \leq x)$ nimitetään jakaumafunktioksi (kertymäfunktioksi)
- keskeisiä jatkuvia jakaumia
  - tasainen jakauma, $X \sim Tas(a, b) \Leftrightarrow f(X = x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$
  - normaalijakauma
  - eksponenttijakauma
  - gammajakauma

Satunnaislukujen generointi

- *"If the numbers are not random, they are at least higgledy-piggledy ('sikin sokin')"*

  — George Marsaglia (1984)
- tietokoneen generoimat satunnaisluvut ovat pseudo-satunnaislukuja
- deterministisesti määräytyneitä, ei "oikeasti satunnaisia"
- mikä on riittävän satunnaista yhdelle sovellukselle ei välttämättä ole sitä toiselle
- olemassa tilastollisia testejä, joilla testataan satunnaisuutta

Linear congruential method

- m modulus
- a kertoja
- c lisäys
- X_0 alkuarvo
- satunnaislukusekvenssi saadaan rekursioyhtälöstä

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m, \ n \geq 0$$

- yleisin tasaisesti jakautuneiden satunnaislukujen generoimismenetelmä
- parametrien m, a, c valinta on erittäin keskeinen kysymys toimivuuden kannalta

Em. menetelmän ominaisuuksia

- menetelmä on syklinen
- sykliä nimitetään periodiksi
- sama siemenluku → periodi alkaa samasta kohdasta → sama sarja "satunnaislukuja"
- käytännössä siemenluvun voi ottaa esim. systeemin kellonajasta
- testausvaiheessa on hyvä että siemenluvun voi asettaa käsin

Kertymäfunktion käänteisfunktio

- todennäköisyysjakauma voidaan siis ilmaista sen kertymäfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ avulla
- $F(x)$ on aina monotoninen (kasvava) funktio
  - siis $F(x_1) \leq F(x_2)$, jos $x_1 \leq x_2$
  - F saa arvot välillä $[0, 1]$
- kun $F(x)$ on jatkuva ja aidosti kasvava, sillä on käänteisfunktio $F^{-1}(y), 0 < y < 1$
- $y = F(x)$ jos ja vain jos $x = F^{-1}(y)$
- käänteisfunktiota voidaan käyttää satunnaislukujen generoimiseen kyseisestä jakaumasta

Transformaatiomenetelmä

- olkoon $f(x)$ sen jakauman tiheysfunktio, josta halutaan generoida satunnaislukuja, ja $F(x)$ vastaava kertymäfunktio
- oletetaan että kertymäfunktiolla on käänteisfunktio $x = F^{-1}(y), 0 < y < 1$
- transformaatiomenetelmä:
  1. generoi satunnaisluku $y \sim Tas(0, 1)$
  2. $x = F^{-1}(y)$ on satunnaisluku joka noudattaa haluttua jakaumaa

Esimerkki: eksponenttijakauma

- keskeisin jakauma tasaisen jakauman ja normaalijakauman jälkeen
- jos tulostimelle saapuu keskimäärin μ tulostuspyyntöä aikayksikköä kohti ja saapumisajat ovat satunnaisia, niiden välit x_i noudattavat eksponenttijakaumaa, $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$
- $p(X = x) = \mu e^{-\mu x}$
- $E(X) = 1/\mu,\ var(X) = 1/\mu^2$

- exponenttijakauman kertymäfunktio:

$$F(x) = 1 - e^{-x/\mu}, x > 0$$

- $F^{-1}(y) = -\mu \log(1-y)$

$\Rightarrow$ $-\mu \log(1-U) \sim \text{ Exp}(\mu)$

- $1 - U$ on tasaisesti jakautunut silloin kun U on

$\Rightarrow$ $x = -\mu \log U$ on eksponenttijakautunut odotusarvolla μ

Hylkäämismenetelmä

- *rejection sampling*
- myös hyväksymis-hylkäämismenetelmä
- ei edellytä kertymäfunktion eikä sen käänteisfunktion tuntemista
- on tunnettava apufunktio $g(x)$, joka saa kaikkialla suuremman arvo kuin $f(x)$ josta otoksia halutaan
- g:n alan oltava äärellinen

Algoritmi

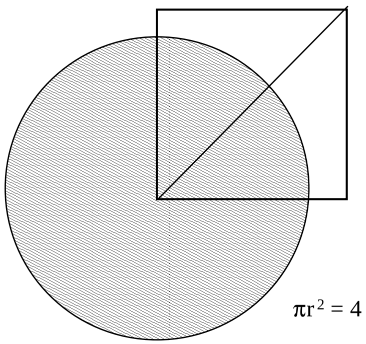
- olkoon $g(x) \geq f(x)$, kaikilla $x \in \Re$
- olkoon $A = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$ ja $G(x)$ vastaava integraalifunktio ("kertymäfunktio") jolla on käänteisfunktio joka pystytään laskemaan
  1. generoi luku $y \sim Tas(0, A)$
  2. kandidaatti x saadaan transformaatiomenetelmellä $x = G^{-1}(y)$
  3. generoi $Z \sim Tas(0, g(x))$
  4. **if** $z < f(x)$ tulosta x **else goto** 1

Toinen muotoilu menetelmälle

- oletetaan että
  - (i) h on sellaisen jakauman H tiheysfunktio, josta voidaan generoida arvoja
  - (ii) $f(x) \leq c\,h(x)$, kaikille x, jollakin vakiolla c
- Algoritmi
  1. generoi kandidaatti $z \sim H$
  2. generoi $u \sim Tas(0, 1)$
  3. **if** $u \leq f(z)/(ch(z))$ **return** z; **else goto** 1
- tehokkuus riippuu suhteesta $f(z)/ch(z)$ eli c:stä

Hyvin simppeli esimerkki

- halutaan generoida satunnaislukuja jakaumasta, jonka tiheysfunktio on neljännesympyrän kehä



- $\pi r^2/4 = 1 \Rightarrow r = 2/\sqrt{(}\pi)$

- olkoon apufunktio $g(x) = c, c > r \Rightarrow G(x) = cx$

1. generoidaan satunnaisluku $y \sim Tas(0, c^2)$
2. määritetään kandidaatti $x = G^{-1}(y) = y/c$
3. generoidaan satunnaisluku $u \sim Tas(0, g(x) = c)$
4. jos $f(x) = \sqrt{(}\frac{4}{\pi} - x^2) < u$ palautetaan x muuten palataan kohtaan 1

Tosielämässä

- monista keskeisistä jakaumista voidaan generoida satunnaislukuja hylkäämismenetelmää käyttäen
- esim. normaali-, gamma-, Poisson-, binomijakaumat
- keskeinen apufunktio g on Lorentzin jakauma tiheysfunktio; kyseisen jakauman integraalifunktio on tangenttifunktio

Arvojen riippumattomuus

- hylkäämismenetelmässä jokainen kandidaatti generoitiin siten, että peräkkäiset arvot eivät riippuneet toisistaan
- jos vakio c suuri, vain pieni osa "arvauksista" osuu oikeaan
- avaruus on liian "harva", arvaukset osuvat liian harvoin
- hyvin monimutkaisista jakaumista (paljon ulottuvuuksia ja riippuvuuksia niiden välillä) ei riippumattomia arvoja voi generoida
- tilastollisessa mallintamisessa saatetaan tarvita otoksia hyvin "hankalista" jakaumista

MCMC-menetelmä

- Markovin ketju Monte Carlo
- sallitaan, että peräkkäiset arvot ovat toisistaan riippuvia
- kun on tehty hyvä "arvaus", kokeillaan seuraavaksi jotakin lähellä olevaa arvoa
- joka kerta kun generoidaan arvoa halutusta jakaumasta, otetaan huomioon edellinen arvo, mutta ei muita

Markovin ketju

- *Markovin ketju* on jono satunnaismuuttujia siten, että jonon seuraava muuttuja riippuu edellisestä (mutta ei muista)

$$Pr(X_n|X_1,\ldots,X_{n-1}) \;=\; Pr(X_n|X_{n-1})$$

- idea: generoidaan ketju, jonka tilojen jakauma on otos halutusta jakaumasta

Algoritmi (Metropolis-Hastings)

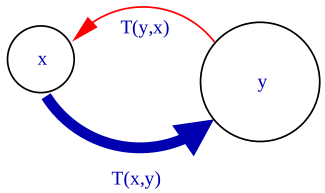
- valitse alkutila x_0
- toista K kertaa ($n = 0,\ldots,K-1$):
  - generoi kandidaatti x' jostakin jakaumasta $Q(x_n)$
  - todennäköisyydellä $\alpha(x_n, x')$ aseta $x_{n+1} := x'$
  - muussa tapauksessa aseta $x_{n+1} := x_n$
  - aseta $n := n+1$
  - tulosta x_n
- yllä $Q(x)$ on x:n ehdotusjakauma
- $q(x, x')$ on Q:n tiheysfunktio

Käänteisyysehto

- M-H -algoritmi perustuu *käänteisyysehtoon*
- jos kaikille pareille $x, y \in E$ pätee

$$f(x)\,T(x,y) \;=\; f(y)\,T(y,x)$$

$\Rightarrow$ ketjun tilojen jakauma on f



- kuinka valita siirtymätodennäköisyydet $T(x,y)$?

Milloin pitää hylätä?

- ilmaistaan käänteisyysehto seuraavasti:

$$f(x)\,q(x,x')\,\alpha(x,x') \;=\; f(x')\,q(x',x),$$

- $\alpha(x,x')$ on siis todennäköisyys, että kandidaatti hyväksytään
- jos $f(x)\,q(x,x') > f(x')\,q(x',x)$ hyväksytään aina
- muuten

$$\alpha(x,x') \;=\; \frac{f(x')\,q(x',x)}{f(x)\,q(x,x')}.$$

Hyväksymistodennäköisyys

- M-H -algoritmi edellyttää vain, että $\frac{f(x')}{f(x)}$ pystytään laskemaan
- ei muita oletuksia jakaumasta
- käytännön kannalta sopivan ehdotusjakauman Q löytäminen tärkeää

Konvergenssi

- alkutila vaikuttaa tilojen jakaumaan
- jotta vaikutus eliminoitaisiin tarvitaan "lämmittelyjakso", jonka aikana ei vielä kerätä generoituja arvoja
- mikä on sopiva lämmittelyjakson pituus?
  - vaikea ongelma
- toinen keskeinen ongelma on, kuinka kauan simulaatiota pitää jatkaa, jotta otos olisi kattava

Yhteenveto

- satunnaislukujen generoiminen halutusta jakaumasta on tarpeen esimerkiksi Monte Carlo -testauksen yhteydessä
- tietokoneen generoimat satunnaisluvut ovat pseudo-satunnaislukuja
- tasaisesti jakautuneiden satunnaislukujen avulla voidaan generoida muita jakaumia noudattavia lukuja
  - transformaatiomenetelmä käyttää halutun jakauman kertymäfunktion käänteisfunktiota
  - hylkäämismenetelmässä käytetään apufunktiota josta osataan generoida otoksia ja joka “sulkee sisäänsä” halutun tiheysfunktion

Otokset tietokannoista

Lähteet

- Jeffrey Scott Vitter: Faster Methods for Random Sampling, *Communications of ACM* 27, 7, 703–718, 1984.
- Numerical Recipes in C, luku 7.3

Luennon runko

- käydään läpi neljä algoritmia joilla voidaan tehdä otantaa tietokannoista
- yksinkertaisimmasta tehokkaimpaan
- kaksi algoritmeista hyödyntää aiemmin käsiteltyjä transformaatio- ja hylkäämismenetelmiä
- näin saadaan kuvaa näistä menetelmistä myös realistisemmassa ympäristössä kuin viime luennon esimerkeissä

Johdanto

- usein tarpeellinen tehtävä on valita $n < N$ tietuetta satunnaisesti tietokannasta, jossa N tietuetta
- talletettuna toissijaiseen muistiin hitaalle välineelle
- kriittinen seikka on kuinka hyvin voidaan välttää turhat luku/kirjoitusoperaaatiot
- halutaan saada tuloksia, jotka pätevät koko aineistoon, joutumatta käymään läpi koko aineistoa
- ei samaa tietuetta kahdesti
- myös tietuekoko voi olla suuri
- esim. laaduntarkkailu, ostoskorianalyysi

Perusmenetelmä P

1. **do** {
   2. generoi satunnainen kokonaisluku $1 \leq k \leq N$
   3. valitse k:s tietue, ellei sitä ole jo valittu
4. } **until** n tietuetta valittu

- vaatii $O(n)$ satunnaisluvun generoimista
- generointiaika $O(n)$, mikäli 3. askelen vaatima tarkistus tapahtuu vakioajassa
- tämä vaatii tilaa $O(N)$ jos tarkistukseen käytetään binääristä taulukkoa, tai $O(n)$ osoitinta hajauttamalla
- n (levy)hakua, mahdollisesti useita hakuja samaan levylohkoon tms.

Sijaintijärjestys

- algoritmi valitsee tietueet ottamatta huomioon niiden sijaintijärjestystä tiedostossa
- esim. 84. tietue voi tulla valituksi ennen 16. tietuetta
- jos otoksen tietueet halutaan poimia järjestyksessä (esim. yhdellä tietokannan läpikäynnillä), tietuenumerot täytyy lajitella ennen poimintaa
- lajitteluaika $O(n \log n)$, esim. quicksort, heapsort
- poimintaa ei voida aloittaa, ennen kuin kaikki tietuenumerot on generoitu
- myöskään tulostusta ei voi tehdä on-line

Otanta järjestyksessä

- generoidaan otokseen tulevien tietueiden numerot suoraan järjestyksessä (on-line)
- ratkaisuperiaate:
- kun N tietueesta on valittava n kpl, kunkin yksittäisen tietueen valinnan todennäköisyys on n/N
  - N on vielä käsittelemättömien tietueiden määrä
  - n on otokseen vielä tarvittavien tietueiden määrä
  - jokaisen tietueen kohdalla valinta todennäköisyydellä n/N
  - kun $n = 0$, algoritmi päättyy

Algoritmi S

1. **do** {
   2. generoi satunnaisluku $u \sim Tas(0, 1)$
   3. **if** $u \leq n/N$ valitse seuraava tietue otokseen ja aseta $n \leftarrow n - 1$
   4. **else** ohita seuraava tietue
   5. aseta $N \leftarrow N - 1$
6. } **while** $n > 0$

Algoritmin S analyysia

- jos jossakin vaiheessa $n = N$ kaikki jäljellä olevat tietueet valitaan otokseen
- koska jokaisen tietueen kohdalla on tehtävä päätös, otetaanko se mukaan vai ei $\rightarrow O(N)$-aikavaativuus

Etäisyyksien generointi

- nopeammissa algoritmeissa generoidaan suoraan peräkkäisten mukaan otettavien tietueiden etäisyyksiä:
  - merkitään $S(n, N)$:llä satunnaismuuttujaa, joka kertoo, kuinka monta seuraavaa tietuetta hylätään
  - ratkaisuperiaate: toistetaan seuraavia askelia, kunnes $n = 0$
    1. generoidaan satunnaisluku $S(n, N)$
    2. hylätään seuraavat $S(n, N)$ tietuetta ja valitaan niitä seuraava
    3. $N \leftarrow N - S(n, N) - 1, n \leftarrow n - 1$

Satunnaismuuttuja $S(n, N)$

- diskreetti satunnaismuuttuja, joka saa arvoja väliltä $0, \ldots, N - n$
- merkitään seuraavassa lyhyesti S
- pistetodennäköisyysfunktio $P(S = s) = f(s)$ ilmaisee, mikä on todennäköisyys, että sivuutetaan täsmälleen s arvoa
- jakaumafunktio $P(S(n, N) \leq s) = \sum_{i=0}^{s} f(i) = F(s)$ ilmaisee, mikä on todennäköisyys että sivuutetaan enintään s arvoa

- $f(0) = n/N$
- $f(s) =$
  P(sivuutetaan yli $s - 1$ arvoa) $\cdot$ P(valitaan $s + 1$:s arvo | sivuutetaan yli $s - 1$ arvoa) $= (1 - F(s-1)) \cdot n/(N - s)$
- f:n ja F:n suljetut muodot hankalia laskea
-
$$f(s) = \frac{n(N-n)!(N-s-1)!}{N!(N-n-s)!}$$
- huom: laskeminen paljon tehokkaampaa kun kertomien osamääriä on ensin sievennetty

Transformaatiomenetelmä

- seuraava algoritmi A perustuu transformaatiomenetelmään (sovellettuna diskreettiin jakaumaan)
- tavoitteena generoida satunnaismuuttuja $s = S(n, N)$ jakaumasta F (tai paremminkin $F(n, N)$)
- apumuuttuja $u \sim Tas(0, 1)$
- käänteisfunktiota $F^{-1}(u)$ ei tunneta
- sen sijaan tarkastellaan $F(s)$:n arvoja
- valitaan s jolla $F(s-1) < u \leq F(s)$
- $F(i)$:n ja $f(i)$:n arvot lasketaan tehokkaasti edellisistä arvoista $F(i-1)$ ja $f(i-1)$

Algoritmi A

1. **do** {
   2. generoi satunnaisluku $u \sim Tas(0, 1)$
   3. $s \leftarrow 0; F(0) \leftarrow n/N$
   4. **while** $u > F(s)$ sivuuta tietue:
      5. $s \leftarrow s + 1; f(s) \leftarrow (1 - F(s-1))n/(N-s)$;
         $F(s) \leftarrow F(s-1) + f(s)$
   6. valitse $s + 1$:s tietue
   7. aseta $n \leftarrow n - 1, N \leftarrow N - s - 1$
8. } **while** $n > 0$

Algoritmin A analyysiä

- do-silmukka suoritetaan n kertaa
- while-silmukka (askel 5) vie kaikkiaan aikaa luokkaa $O(N)$, koska jokainen tietue käydään läpi kerran
- algoritmin aikavaativuus on siis $O(N)$ (kuten Algoritmi S)
- generoitavien satunnaislukujen määrä on n eli huomattavasti pienempi

Hylkäämismenetelmä

- seuraavassa algoritmissa D käytetään satunnaismuuttuja $S(n, N)$:n generointiin hylkäämismenetelmää (sekä transformaatiomenetelmää apujakaumalle g)
- apujakauma g on jatkuva
  - muunnetaan diskreetti pistetodennäköisyysfunktio jatkuvaksi porrasfunktioksi
  - portaan pituus on 1 ja funktion arvo i:nnellä portaalla on pistetodennäköisyys $p(i-1)$
  - ks. kuva Numerical Recipes, s. 294
- hylkäysmenetelmässä s:n arvoksi käytetään vain kokonaislukuosaa $\lfloor x \rfloor$

- tehtävä siis: generoi satunnaislukuja S:n jakaumasta
- olkoon g sopiva apujakauma, joka approksimoi jakaumaa $F(s)$ "hyvin"
- etsitään $c \geq 1$ jolle $f(\lfloor x \rfloor) \leq cg(x)$ kaikilla x relevantilla arvoalueella
- generoidaan jakaumasta g kandidaatti x
- generoidaan satunnaisluku u väliltä $0, \ldots, 1$
- jos $u > f(\lfloor x \rfloor)/(cg(x))$ hylätään $\lfloor x \rfloor$
- muuten hyväksytään $s \leftarrow x$

Litistys (*squeeze method*)

- ehdon $u > f(\lfloor X \rfloor)/(cg(X))$ testaaminen vie jonkin verran aikaa, koska f on työläs laskea
- hylkäämisen todennäköisyys on pieni

$\Rightarrow$ aikaa voidaan säästää korvaamalla $f(s)$ funktiolla $h(s)$ joka voidaan laskea nopeammin ja jolle $h(s) \leq f(s)$

- $f(\lfloor X \rfloor)$ täytyy laskea vain kun $u > h(\lfloor X \rfloor)/cg(X)$
- litistystekniikka: $h(\lfloor X \rfloor) \leq f(\lfloor X \rfloor) \leq cg(X)$
- litistys ei tietysti ole välttämätöntä algoritmin toiminnan kannalta

Algoritmi D

1. **do** {
   2. generoi satunnaisluku $u \sim Tas(0,1)$
   3. generoi satunnaisluku x jakaumasta $g(x)$
   4. **if** $u \leq h(\lfloor x \rfloor)/(cg(x))$ aseta $s \leftarrow \lfloor x \rfloor$
   5. **else if** $u \leq f(\lfloor x \rfloor)/(cg(x))$ aseta $s \leftarrow \lfloor x \rfloor$
   6. **else goto 2**
   7. sivuuta s tietuetta ja valitse sen jälkeen seuraava otokseen
   8. aseta $n \leftarrow n-1, N \leftarrow N-s-1$
9. } **while** $n > 0$

Sopivan funktion g valinta

- mikä on sopiva apufunktio g?
- S:n arvo on pienin n:stä *kokonaisluvusta*, jotka on generoitu ("ilman takaisinpanoa") toisistaan riippumattomasti väliltä $0,\ldots,N$
- generoidaan otos "vastaavasta" jatkuvasta jakaumasta ("takaisinpanolla")
- olkoon X satunnaismuuttuja ko. jakaumasta
- X:n arvo voidaan ajatella pienimmäksi n:stä riippumattomasta *reaaliluvusta* Tas$(0,N)$-jakaumasta

Kandidaattien generointi

- kandidaatin x generoiminen jakaumasta g on helppoa ja nopeaa
- käytetään transformaatiomenetelmää
- merkitään $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ riippumattomia Tas$(0,N)$-jakautuneita reaalilukuja
- näitä lukuja ei suinkaan tarvitse generoida, niitä käytetään tässä vain g:tä vastaavan jakaumafunktion $G(x)$ johtamiseen

$$G(x) = P(X \leq x) \;=\; 1 - P(X > x)$$
$$= \;1 - \prod_{1 \leq k \leq n} P(Z_k > x) = 1 - (1 - \frac{x}{N})^n.$$

Kandidaattien generointi (2)

- haluttu x saadaan siis transformaatiomenetelmällä $x = G^{-1}(u)$
- edellyttää tietysti että sellainen on (tässä sivuutetaan sen näyttäminen intuitioon vedoten, samoin tekninen käänteisfunktion johtaminen)
- saadaan $G^{-1}(u) = N(1-(1-u)^{1/n})$
- koska muuttuja $1-U$ on tasaisesti jakautunut kun U:kin on, saadaan kandidaatti x asettamalla

$$x \leftarrow N(1 - u^{1/n})$$

Muut parametrit

- myös vakio c ja litistämiseen käytettävä funktio h valittava
- h:n oltava tiukka alaraja, toisaalta sellainen että se pystytään laskemaan nopeasti
- $$c = \frac{N}{N-n+1}$$
  $$h(s) = \frac{n}{N}\left(1 - \frac{s}{N-n+1}\right)^{n-1}$$

Algoritmin analyysiä

- kun n on suuri suhteessa N:ään, algoritmi saattaa olla hitaampi kuin algoritmi A
- do-silmukka suoritetaan n kertaa
- enää ei tarvitse käydä sen sisällä läpi tietueita vaan sivuutettavien tietueiden lukumäärä saadaan generoitua suoraan satunnaislukuna vastaavan satunnaismuuttujan jakaumasta
- algoritmin aikavaativuus on siis $O(n)$

Yhteenveto

- usein tarpeellinen tehtävä on valita otos satunnaisesti tietokannasta
- turhien luku-/kirjoitusoperaatioiden välttäminen tärkeää
- siksi tietueet on syytä valita järjestyksessä jossa ne on talletettu
- hylkäämismenetelmään perustuva algoritmi suoriutuu tehtävästä lineaarisessa ajassa suhteessa otoksen kokoon