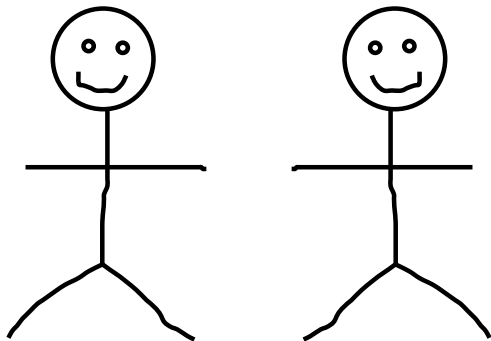


Näkyvät ja näkymättömät symmetriat

Jokke Häsä, Helsingin yliopisto
Matematiikan yö 28.9.2013
Tiedekeskus Heureka

Peilisyymmetria

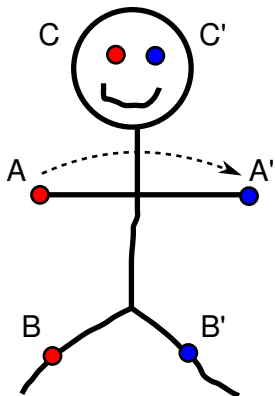


Kiertosymmetria

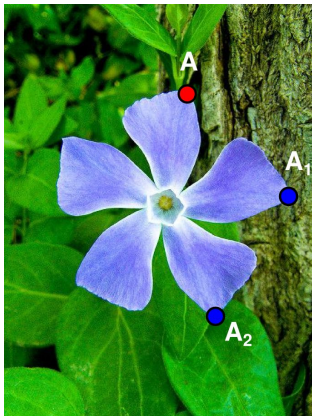


Symmetriamuunnos eli -kuvaus

HANDOUTIT!

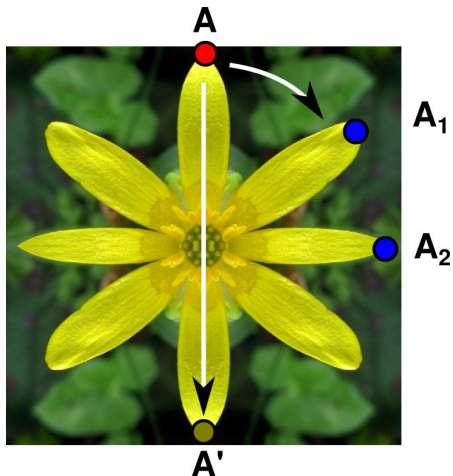


Symmetriamuunnos eli -kuvaus



$$A_5 = A$$

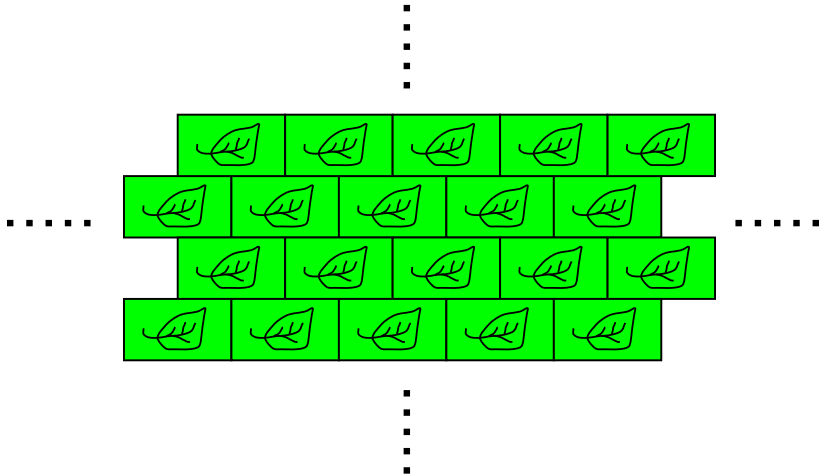
Peili- ja kiertosymmetrioita



Siirtosymmetria



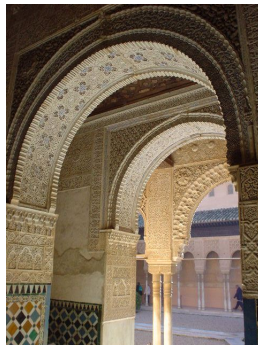
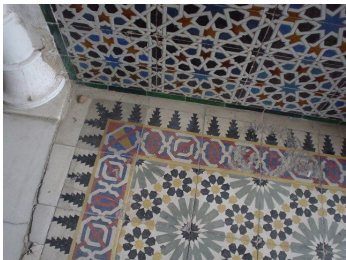
Laatoitus



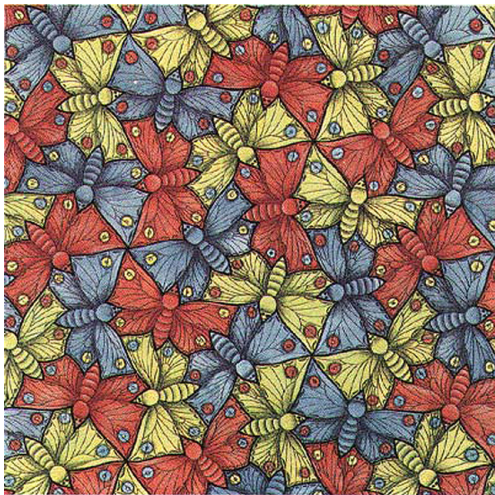
Alhambra, 1300-luku



Alhambra, mosaiikit



M. C. Escher, 1898–1972

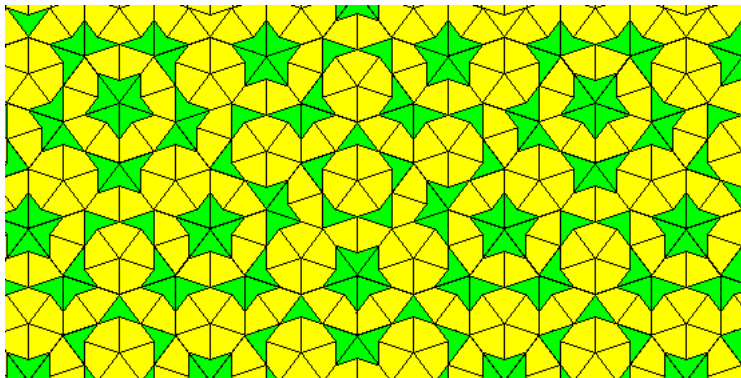


Laatoituskuvioiden symmetriat

- Aina mukana äärettömät siirtosymmetriat vaaka- ja pystysuunnassa.
- Sen lisäksi mahdollisia äärellisiä kierto-, peilaus- ja liukupeilaussymmetrioita.
- Symmetrioidensa perusteella erilaisia laatoituksia vain 17 kpl!

Laatoitus ilman siirtosymmetriaa

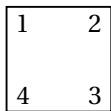
Roger Penrose, 1931–



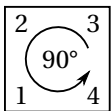
Symmetrioiden matematiikka

- Kaksi symmetriamuunnosta peräkkäin tehtynä tuottaa kolmannen.
- Symmetrioilla voi "laskea", kuin luvuilla.
- Jokainen symmetriamuunnos voidaan kääntää.
- Symmetriat muodostavat suljetun systeemin, ns. **ryhmän**.

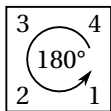
Neliön symmetriat



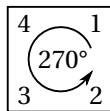
1



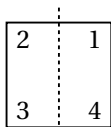
ρ_1



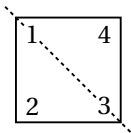
ρ_2



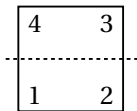
ρ_3



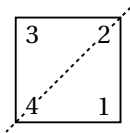
σ_1



σ_2



σ_3



σ_4

Esimerkiksi $\rho_1 + \sigma_1 = \sigma_4$, $\sigma_1 + \sigma_2 = \rho_1$, jne.

Neliön symmetriaryhmä

	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
ρ_3	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1
σ_4	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1

Huom! Esimerkiksi $\sigma_1 + \rho_1 = \sigma_2$, mutta $\rho_1 + \sigma_1 = \sigma_4$!

Ryhmäteoria

- Ryhmäteoria tutkii symmetrioita.
- Ryhmä voidaan määritellä täysin abstraktisti, esimerkiksi luettelemalla joukko objekteja ja niiden "laskutoimitustaulu".
- 1970-luvulla löydettiin abstraktisti ns. Hirviöryhmä, joka sisältää noin $8 \cdot 10^{53}$ symmetriaa.
- Pian tajuttiin, että pienin olio, jonka symmetrioita Hirviöryhmän alkiot ovat, elää 196883-ulotteisessa avaruudessa.

Yhtälöiden symmetriat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- \pm on merkki siitä, että yhtälöllä on (peili)symmetria.
- 3. asteen yhtälön symmetriat ovat korkeintaan yhtä monimutkaisia kuin kolmiolla
- 4. asteen yhtälön symmetriat voivat olla monimutkaisempia kuin neliöllä

Yhtälöiden symmetriat

- 5. asteen yhtälön symmetriat voivat olla niin monimutkaisia, ettei sille ole olemassa ratkaisukaavaa (Abel, Galois, 1820-1830)



Muita sovelluksia

- kiteiden symmetriat kemiassa/fysiikassa
- molekyylien symmetriat
- aaltofunktion vaihesymmetria kvanttimekaniikassa
- ym., ym.