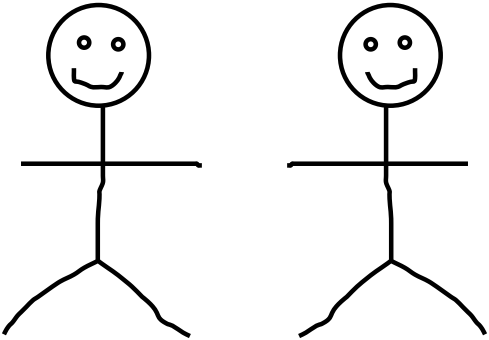
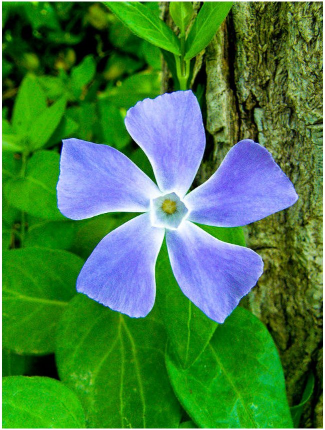
Symmetriaryhmät ja niiden esitykset

Osa I: Symmetriaryhmät

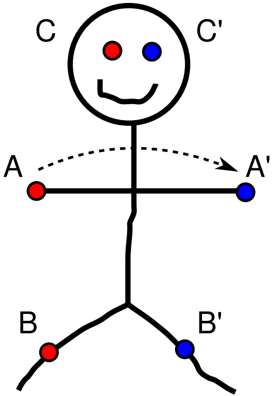
Peilisymmetria



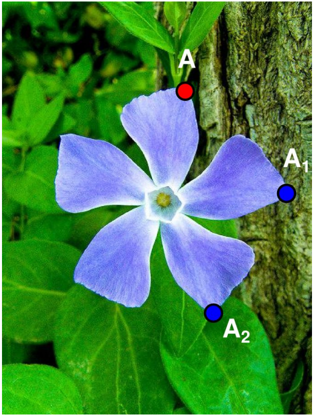
Kiertosymmetria



Symmetriamuunnos eli -kuvaus

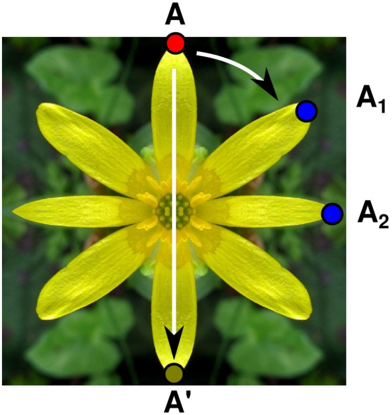


Symmetriamuunnos eli -kuvaus



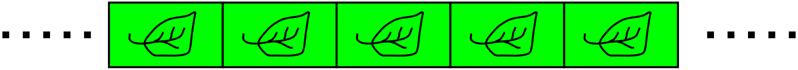
$$A_5 = A$$

Peili- ja kiertosymmetrioita

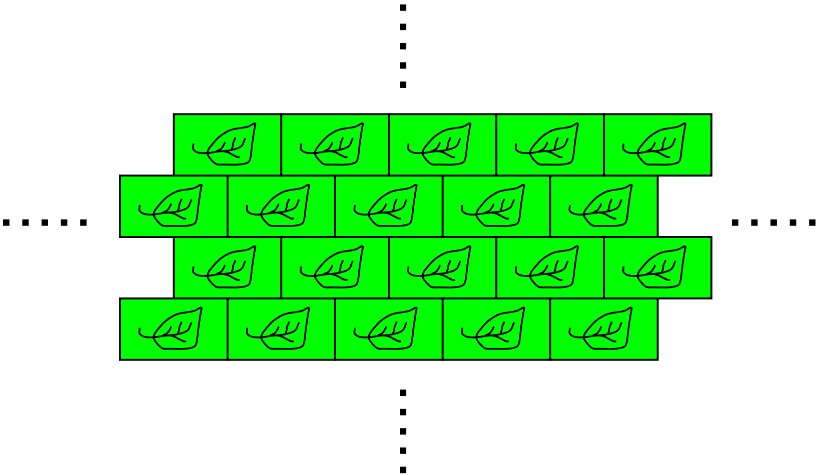


- peilisymmetrian ns. *kertaluku* on 2 (aina)
- kiertosymmetrian kertaluku on 8 (tässä)

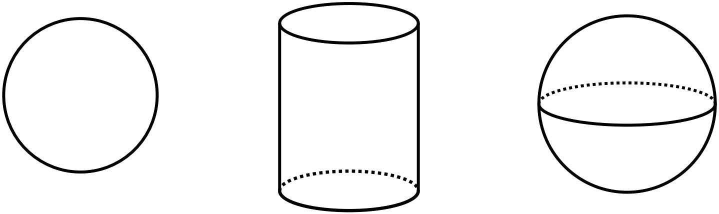
Äärettömiä symmetrioita: siirtosymmetria



Äärettömiä symmetrioita: laatoitus



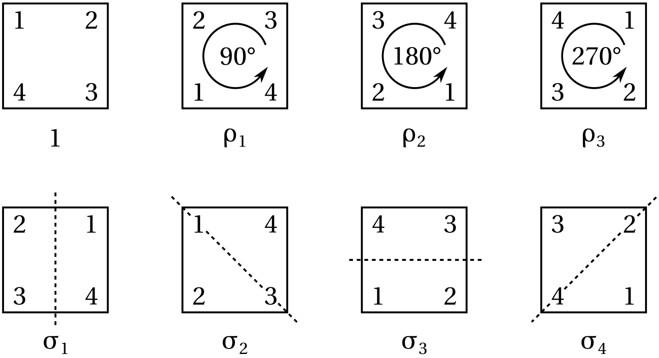
Äärettömiä symmetrioita: ympyrä, lieriö, pallo, jne.



Symmetrioiden matematiikka

- Symmetrioilla voi ”laskea”, kuin luvuilla.
- Kaksi symmetriamuunnosta peräkkäin tehtynä tuottaa kolmannen.
- Symmetriat muodostavat suljetun systeemin, ns. **ryhmän**.

Neliön symmetriat



- Esimerkiksi $(\rho_1 + \sigma_1 = \sigma_4) \quad \rightarrow \quad \rho_1\sigma_1 = \sigma_4$

Neliön symmetriaryhmän (D_4) kertotaulu

	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
1	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2
ρ_3	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_2	σ_2	σ_3	σ_4	σ_1	ρ_3	1	ρ_1	ρ_2
σ_3	σ_3	σ_4	σ_1	σ_2	ρ_2	ρ_3	1	ρ_1
σ_4	σ_4	σ_1	σ_2	σ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	1

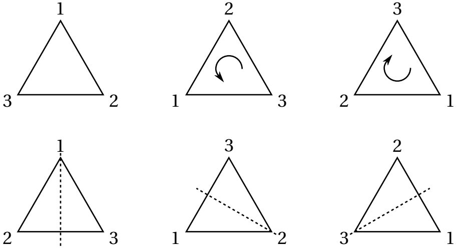
- Esimerkiksi $\sigma_1\rho_1 = \sigma_2$, mutta $\rho_1\sigma_1 = \sigma_4$!
- Kuitenkin $1 \cdot \sigma_1 = \sigma_1$, jne.

Konkreettisesta abstraktiin

- Kolmen kortin sekoitukset (S_3):

$$\heartsuit\diamondsuit\spadesuit \qquad \diamondsuit\spadesuit\heartsuit \qquad \spadesuit\heartsuit\diamondsuit$$
$$\spadesuit\diamondsuit\heartsuit \qquad \diamondsuit\heartsuit\spadesuit \qquad \heartsuit\spadesuit\diamondsuit$$

- Kolmion symmetriat (D_3):



- Sama kertotaulu eli matemaattisesti sama ryhmä

Sovellus: Yhtälöiden symmetriat

- Toisen asteen yhtälö: $ax^2 + bx + c = 0$
- Ratkaisukaava:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $\pm$ on merkki siitä, että yhtälöllä on (peili)symmetria.
- 3. asteen yhtälön symmetriat ovat korkeintaan yhtä monimutkaisia kuin kolmiolla, ratkaisukaava olemassa
- 4. asteen yhtälön symmetriat voivat olla monimutkaisempia kuin neliöllä, silti ratkaisukaava olemassa

Sovellus: Yhtälöiden symmetriat

- Vasta 5. asteen yhtälön symmetriat voivat olla niin monimutkaisia, ettei sille ole olemassa ratkaisukaavaa (Abel, Galois, 1820-1830)

Muita sovelluksia

- kiteiden symmetriat kemiassa/fysiikassa
- molekyylien symmetriat
- aaltofunktion vaihesymmetria kvanttimekaniikassa
- ym., ym.

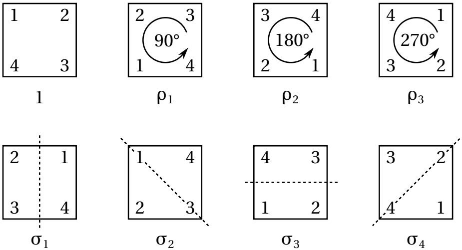
Ryhmien lineaariesitykset

- Abstrakti ryhmä D_4:

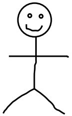
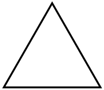
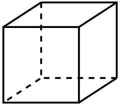
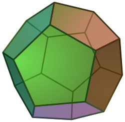
$$\{\rho^4 = 1,\ \sigma^2 = 1,\ \sigma\rho = \rho^3\sigma\}$$

vs.

- Konkreettiset liikkeet tasossa:



Abstraktista konkreettiseen

- S_2 (kahden kortin sekoitukset): 
- S_3 (kolmen kortin sekoitukset): 
- S_4 (neljän kortin sekoitukset): 
- A_5 (puolet viiden kortin sekoituksista): 
- esityksiä myös korkeammissa ulottuvuuksissa, esim. 5:n kortin sekoitusten pienin (täysin kuvaava) esitys on 4-ulotteinen

Ryhmä lukuina

- Kaikki n-ulotteisen avaruuden kierrot, peilaukset jne. voidaan esittää lukutaulukoina eli matriiseina.
- Ryhmän esitys tekee siis abstraktista konkreettista myös laskuissa.
- Abstrakti ryhmä D_4 ($\rho^4 = 1$, $\rho\sigma = \sigma\rho^3$ jne.)
  - $\rightarrow$ 2-ulotteinen esitys neliön symmetrioina
  - $\rightarrow$ matriisit:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

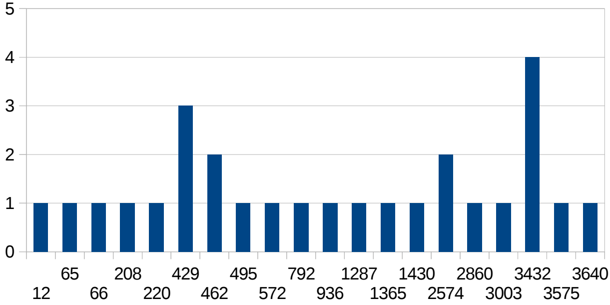
Osa II: Väitöstutkimus

Esityskasvu

- Kuinka monta erilaista esitystä on n-ulotteisessa avaruudessa?
- Voidaan tarkastella yhden tai useamman ryhmän esityksiä.
- Määrä keskimäärin kasvaa ulottuvuuden kasvaessa.
- Etsitään kasvun tyyppiä tai ylärajaa.

Esityskasvu

Ryhmän A_{13} (puolet 13-korttisen pakan sekoituksista) esityksiä ulottuvuuteen 4000 asti:



Ohjaajani tutkimus

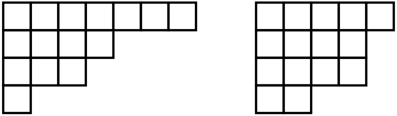
- Äärelliset yksinkertaiset ryhmät (1980-luvun alusta):
  (a) Sykliset ryhmät C_p (jaottomat kiertosymmetriat tasossa)
  (b) Alternoivat ryhmät A_m (puolet korttipakan sekoituksista)
  (c) Lie-tyypin ryhmät (matriisi- eli lukutaulukkoryhmiä)
  (d) Sporadiset ryhmät (mitä jää yli, 26 kpl)
- Esimerkki (Liebeck ja Shalev, 2003): Lie-tyypin SL_2 ryhmille pätee, että

  on olemassa sellainen vakio c, että n-ulotteisessa olevien esitysten lukumäärä on korkeintaan $c \cdot n$

- Oma tulokseni tähän liittyen: voidaan valita $c = 2{,}7$.

Esimerkki: sekoitusryhmät S_m

- Jos kortteja on esim. 15 kpl, tarkastellaan 15 laatikon porrasmaisia pinoja:



jne.

- Jokainen pino vastaa yhtä esitystä.
- Lasketaan, monellako tavalla luvut 1–15 voidaan sijoittaa laatikoihin niin, että

  jokaisen luvun alla ja oikealla puolella on aina suurempi luku

- Tapojen lukumäärä on kyseistä pinoa vastaavan esityksen avaruuden ulottuvuusluku.

Esimerkki: sekoitusryhmät S_m

- Kaikkien sekoitusryhmien esitykset voidaan koota taulukkoon.

ulottuvuus $\rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots$
S_2	2	0	0	0	0	0	0	0	
S_3	2	1	0	0	0	0	0	0	
S_4	2	1	2	0	0	0	0	0	
S_5	2	0	0	2	2	1	0	0	$\ldots$
S_6	2	0	0	0	2	0	0	0	
S_7	2	0	0	0	0	2	0	0	
$\vdots$				$\vdots$					

- Arvioimalla laatikkopinojen erilaisia muotoja ja niihin sijoitettavien lukujen järjestystä voidaan arvioida taulukon sisältöä.
- Vastaus kysymykseen ”kuinka monta esitystä on ulottuvuudessa n” on sarakkeen n kaikkien lukujen summa.