Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 6
to 4.3.2010

1. Tarkastellaan polynomien $f = X^4 - 1$ ja $g = X^3 + X$ virittämää ideaalia polynomirenkaassa $\mathbb{Z}[X]$.
   (a) Etsi jokin $h \in \mathbb{Z}[X]$, jolle pätee $\langle h \rangle = \langle f, g \rangle$.
   (b) Osoita, että tekijärenkaassa $\mathbb{Z}[X]/\langle f, g \rangle$ on alkio a, jolle pätee $a^2 = -1$.

2. Olkoon R rengas ja A sen ideaali. Todista seuraavat väitteet (lause 6.6):
   (a) A on alkuideaali, jos ja vain jos R/A on kokonaisalue.
   (b) A on maksimaalinen, jos ja vain jos R/A on kunta.

3. Oletetaan, että A on renkaan R ideaali ja B on maksimaalinen ideaali tekijärenkaassa R/A. Olkoon π kanoninen surjektio $R \to R/A$. Osoita, että $\pi^{-1}B$ on renkaan R maksimaalinen ideaali, joka sisältää A:n. (Korollaari 6.10.)

4. Todista seuraavat väitteet:
   (i) Jos $f : M \to N$ on modulihomomorfismi, niin $\operatorname{Im} f$ on modulin N alimoduli ja $\operatorname{Ker} f$ on modulin M alimoduli.
   (ii) Jos (M_i) on perhe modulin M alimoduleja, niiden summa $\sum_i M_i$ koostuu alkioista $\sum_i x_i$, missä $x_i \in M_i$ kaikilla i ja $x_i = 0$ lukuunottamatta äärellistä joukkoa indeksejä i.

5. Olkoon R rengas, jolla on ideaali A ja alirengas S. Tarkista seuraavat väitteet:
   (i) Jokainen R/A-moduli on myös R-moduli, mutta kaikki R-modulit eivät ole R/A-moduleja.
   (ii) Jokainen R-moduli on myös S-moduli, mutta kaikki S-modulit eivät ole R-moduleja.

   Vihje: Ajattele $\mathbb{Z}_n$-moduleja.

6. Olkoot M ja N jotain R-moduleja. Osoita, että $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ on R-moduli, ja että $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$. (Tässä rengas R ajatellaan moduliksi omalla kertolaskullaan varustettuna.)