Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 8
to 25.3.2010

1. Osoita, että jokainen $\mathbb{Z}$-modulin $\mathbb{Q}$ vapaa osajoukko sisältää korkeintaan yhden alkion, ja päättele tästä, että $\mathbb{Q}$ ei ole vapaa ryhmä.

2. Olkoot M ja N jotain R-moduleja. Oletetaan, että modulilla M on kanta B ja $f : B \to N$ on jokin kuvaus. Olkoon $\varphi : M \to N$ sellainen R-lineaarinen kuvaus, jolle pätee $\varphi(b) = f(b)$ kaikilla $b \in B$ (vrt. lause 8.2). Osoita, että

   i) Kuvaus φ on injektio, jos ja vain jos kuvajoukko fB on vapaa.
   ii) Kuvaus φ on surjektio, jos ja vain jos kuvajoukko fB virittää modulin N.

3. Osoita, että jokainen vaihdannainen ryhmä on jonkin vapaan vaihdannaisen ryhmän tekijäryhmä.

   Vihje: Valitse ryhmälle G jokin virittäjäjoukko X ja tarkastele vapaata modulia $\mathbb{Z}^{(X)}$. Käytä homomorfialausetta sopivaan lineaarikuvaukseen $\varphi : \mathbb{Z}^{(X)} \to G$.

4. Olkoon M jokin äärellinen vaihdannainen ryhmä. Kuvaile modulia $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

5. Oletetaan, että M, N ja P ovat R-moduleja, ja $\varphi : M \to N$ on isomorfismi. Todista seuraavat isomorfismit:

   a) $M \otimes P \cong N \otimes P$, missä $x \otimes y \mapsto \varphi(x) \otimes y$
   b) $R \otimes M \cong M$, missä $a \otimes x \mapsto a.x$
   c) $(M \oplus N) \otimes P \cong (M \otimes P) \oplus (N \otimes P)$, missä $(x, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z, y \otimes z)$.

   Kohdassa (b) rengasta R ajatellaan R-modulina.

   Vihje: Konstruoi kohdassa (c) lineaarikuvaukset $\psi_1 : M \otimes P \to (M \oplus N) \otimes P$, missä $x \otimes z \mapsto (x, 0) \otimes z$, ja $\psi_2 : N \otimes P \to (M \oplus N) \otimes P$, missä $y \otimes z \mapsto (0, y) \otimes z$. Määrittele sitten $\psi : (M \otimes P) \oplus (N \otimes P) \to (M \oplus N) \otimes P$ kaavalla $\psi(u, v) = \psi_1(u) + \psi_2(v)$.

6. Tarkastellaan $\mathbb{Z}$-modulien tensorituloa $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

   a) Osoita, että on olemassa $\mathbb{Z}$-lineaarinen kuvaus $\varphi : \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, jolle pätee $\varphi(x \otimes y) = xy$.
   b) Osoita, että kuvaus $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, missä $\psi(x) = x \otimes 1$, on surjektio ja kuvauksen φ käänteiskuvaus.