Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 9 (2 sivua)
to 8.4.2010

1. Todista lemma 8.14: Oletetaan, että R ja S ovat renkaita ja että on olemassa rengashomomorfismi $R \to S$. Jos $M = R^n$, niin M_S ja S^n ovat isomorfisia S-moduleina. (Voit käyttää lausetta 8.11.)

2. Olkoon A liitännäinen ja ykkösellinen R-algebra. Osoita, että on olemassa R-algebrojen homomorfismi $\varphi : R \to A$, jolle pätee $1_R \mapsto 1_A$. Jos R on kunta, osoita, että R voidaan upottaa A:n alialgebraksi.

3. Tarkastellaan kvaternioalgebraa $\mathbb{H}$.

   a) Osoita, että jokaisella alkiolla $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ on käänteisalkio.

   b) Olkoot $x = x_1 i + x_2 j + x_3 k$ ja $y = y_1 i + y_2 j + y_3 k$. Esitä kvaternio xy vektoreiden (x_1, x_2, x_3) ja (y_1, y_2, y_3) piste- ja ristitulojen avulla.

4. Olkoon R rengas, ja M jokin R-moduli. *Tensorialgebra* $T(M)$ määritellään suorana summana
$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} T_k(M),$$
missä $T_0(M) = R$ ja $T_{k+1}(M) = T_k(M) \otimes M$ kaikilla $k \geq 0$. Samastetaan kukin $T_k(M)$ vastaavan alimodulin $\iota_k(T_k(M)) \subset T(M)$ kanssa, missä ι_k on kanoninen injektio. Samastetaan lisäksi modulit $R \otimes M$ ja M tunnetun isomorfismin mukaisesti. Osoita, että $(x, y) \mapsto x \otimes y$ on hyvin määritelty bilineaarinen kertolasku R-modulissa $T(M)$ ja että $T(M)$ on tämän kertolaskun suhteen liitännäinen ja ykkösellinen R-algebra.

   Vihje: Modulin $T(M)$ mielivaltainen alkio on muotoa $a + \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, missä $a \in R$, $x_k = x_k^1 \otimes \cdots \otimes x_k^k$ kaikilla $k \geq 1$ ja $x_k \neq 0$ vain äärellisen monella k.

5. Osoita, että on olemassa vain kolme keskenään epäisomorfista 2-ulotteista ykkösellistä reaalikertoimista algebraa.

   Vihje: Samastetaan ykkösalkion virittämä aliavaruus kerroinkunnan $\mathbb{R}$ kanssa (vrt. tehtävä 2). Valitse toiseksi kantavektoriksi 1 ja toiseksi jokin $b \notin \mathbb{R}$. Tarkastele kantavektorien kertotaulua. Jos $b^2 = x + yb$ joillain $x, y \in \mathbb{R}$, määrittele $b' = b - y/2$. Näin voit olettaa, että $b^2 \in \mathbb{R}$.

6. Tarkastellaan symmetrisen ryhmän S_3 reaalista ryhmäalgebraa $\mathbb{R}S_3$.

   a) Etsi algebrasta $\mathbb{R}S_3$ jokin yksiulotteinen alialgebra.

   b) Algebra $\mathbb{R}S_3$ on myös $\mathbb{R}S_3$-moduli, kun skalaarikertolasku määritellään kaavalla $x.y = x \cdot y$. Etsi tästä modulista jokin yksiulotteinen $\mathbb{R}S_3$-alimoduli, joka on eri kuin kohdassa a) löydetty alialgebra.

   Vihje: Etsi a)-kohdassa jokin vektori $\sum_{\sigma \in S_3} x_\sigma \sigma$, jonka virittämä aliavaruus on suljettu algebrakertolaskun suhteen.