Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 10
to 15.4.2010

1. Algebraa kutsutaan *äärellisviritteiseksi*, jos se sisältää sellaisen äärellisen osajoukon $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, että jokainen algebran alkio voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa joukon X alkioiden äärellisistä tuloista. Osoita, että jokainen äärellisviritteinen ykkösellinen, liitännäinen ja vaihdannainen R-algebra on isomorfinen jonkin R-kertoimisen polynomialgebran tekijäalgebran kanssa.

2. Etsi jokaista harjoituksen 9 tehtävässä 5 esiintyvää algebraa A vastaava kaksiulotteisen polynomialgebran $\mathbb{R}[X]$ ideaali I, jolle pätee $\mathbb{R}[X]/I \cong A$.

3. a) Osoita, että avaruuden $\mathbb{R}^3$ ristitulo tekee kyseisestä avaruudesta Lien algebran.
   b) Osoita, että matriisit
   $$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
   muodostavat Lien algebran $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ kannan. Mitkä ovat $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$:n rakennevakiot tämän kannan suhteen?

4. Olkoon K kunta. Todista seuraavat väitteet:
   a) Jos $\mathrm{char}(K) = p > 0$, niin p on alkuluku.
   b) Jos $\mathrm{char}(K) = p > 0$, niin jokainen K:n alikunta sisältää kunnan $\mathbb{F}_p$ kanssa isomorfisen alikunnan.
   c) Jos $\mathrm{char}(K) = 0$, niin jokainen K:n alikunta sisältää kunnan $\mathbb{Q}$ kanssa isomorfisen alikunnan.

5. Olkoon K kunta. Oletetaan, että $f \in K[X]$ on jaoton polynomi. Osoita, että f:n virittämä pääideaali on alkuideaali.

   Vihje: Jos $gh \in \langle f \rangle$, kirjoita jakoyhtälön avulla $f = gq + r$ ja näytä, että $f | (rh)$.

6. Osoita, että polynomit $X^2 - X + 1$ ja $X^3 + X + 1$ ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{F}_2[X]$ mutta eivät renkaassa $\mathbb{F}_3[X]$. Muodosta vastaavat kunnan $\mathbb{F}_2$ laajennokset ja ratkaise niissä yhtälöt $a^3 = 1$ ja $b^4 + b^2 = 1$.