Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 11 (2 sivua)
to 22.4.2010

1. Oletetaan, että R on kokonaisalue. Todista seuraavat väitteet (lemma 11.1):

   a) Alkiot $a, b \in R$ ovat liittoalkioita, jos ja vain jos $a = bc$, missä $c \in R$ on yksikkö.

   b) Jos $a, b \in R$ ovat liittoalkioita ja $a = bc$, niin c on yksikkö.

   c) Kaikki yksiköt ovat toistensa liittoalkioita.

2. Osoita, että renkaassa $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ luku 2 on jaoton luku, joka jakaa tulon $(1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5})$ mutta ei sen tekijöitä. Päättele tästä, että $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ ei ole tekijöihinjakorengas.

   Vihje: Jos 2 on jaollinen, niin $2 = (a + bi\sqrt{5})(c + di\sqrt{5})$ joillain $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tarkastele tämän yhtälön eri puolilla esiintyvien kompleksilukujen pituuksia (eli moduleja).

3. a) Olkoon R rengas ja $b \in R$. Osoita, että kuvaus $\tau_b : R[X] \to R[X]$, missä $\sum_i a_i X^i \mapsto \sum_i a_i (X + b)^i$, on rengasisomorfismi. Päättele, että $f \in R[X]$ on jaoton, jos ja vain jos $\tau_b(f)$ on jaoton.

   b) Olkoon p alkuluku. Osoita, että $X^p - 1 = (X - 1)g$, missä $g \in R[X]$ on jaoton kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen.

   Vihje: Tarkastele polynomia $\tau_1(X^p - 1)$ ja käytä Eisensteinin kriteeriä.

4. a) Olkoon R rengas. Osoita, että $R[X, Y] \cong R[X][Y]$ (R-algebroina).

   b) Olkoon L kunnan K laajennos, ja olkoot a ja b joitain L:n alkioita. Osoita, että $K(a, b) = K(a)(b)$.

5. Määritä seuraavissa tapauksissa joukon A virittämän laajennoksen L/K alilaajennoksen $K(A)$ aste:

   a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$, $A = \{\sqrt{2}\}$.

   b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $A = \{\sqrt{2}, i\}$.

   c) $K = \mathbb{F}_2$, $L = \mathbb{F}_2[X]/\langle X^5 + X^3 + 1\rangle$, $A = \{\overline{X}^2\}$.

   Vihje: $[K(A) : K]$ on luvun $[L : K]$ tekijä.

6. Tutki, mitkä seuraavista polynomeista ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{Q}[X]$:

(a) $X^3 + 2X^2 + X - 4$

(b) $X^3 + 2X^2 + X - 5$

(c) $7X^4 + X^3 - 2X^2 + 6X + 1$

(d) $-3X^5 + 6X^3 - 2$

(e) $X^6 - 5X + 10$

(f) $2X^3 + 5X^2 + 6X + 24$.

Osoita lisäksi, että polynomit $3XY^2 - XY + 2$ ja $X^2 - Y$ ovat jaottomia renkaassa $\mathbb{Q}[X, Y] \cong \mathbb{Q}[X][Y]$. (Voit käyttää Eisensteinin kriteeriä.)