Algebra II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 12
to 29.4.2010

1. Selvitä seuraavat laajennosten asteet:

   a) $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5}) : \mathbb{Q}]$
   b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$
   c) $[\mathbb{Q}(i, e^{\pi i/3}) : \mathbb{Q}]$
   d) $[\mathbb{F}_2(\overline{X}^5) : \mathbb{F}_2]$, missä $\mathbb{F}_2(\overline{X}^5) \subset \mathbb{F}_2[X]/\langle X^4 + X^3 + 1\rangle$
   e) $[\mathbb{Q}(e^{2\pi i/9}) : \mathbb{Q}]$.

   Vihje: (c) Voit osoittaa, että $\mathbb{Q}(i, e^{\pi i/3}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$. (d) Koska kertolaskuryhmä K^* on äärellinen, voidaan löytää sellainen n, että $(\overline{X}^5)^n = 1$.

2. Todista lause 13.7: Kunnan K äärellinen laajennos on äärellisviritteinen ja algebrallinen K:n suhteen.

3. Olkoon $A = \{2^{1/n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Osoita, että $\mathbb{Q}(A)$ on $\mathbb{Q}$:n ääretön algebrallinen laajennos. Onko laajennoksella $\mathbb{Q}(A)/\mathbb{Q}$ äärellistä virittäjäjoukkoa?

4. Oletetaan tunnetuksi luvun π transkendenttisuus rationaalilukujen suhteen. Osoita, että ympyrän neliöinti ja kuution kahdentaminen ovat harppi–viivainkonstruktioina mahdottomia.

5. Olkoon L kunnan K laajennos ja olkoon $A \subset L$ mielivaltainen joukko K:n suhteen algebrallisia alkioita. Osoita, että $K(A)/K$ on algebrallinen laajennos. (Muista lause 12.7.)

6. Olkoon $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ kaikkien $\mathbb{Q}$:n suhteen algebrallisten lukujen joukko. Osoita, että $\mathbb{A}$ on *algebrallisesti suljettu* $\mathbb{C}$:ssä, eli jos $\alpha \in \mathbb{C}$ on jonkin $\mathbb{A}$-kertoimisen polynomin juuri, niin $\alpha \in \mathbb{A}$.