# Ryhmäteoriaa

## 2. Ryhmän toiminta

Permutaatiot kuvaavat jonkin perusjoukon alkioita toisikseen. Eräät permutaatiot jättävät joitain alkioita paikalleen, toiset liikuttavat kaikkia joukon alkioita. Kaikki permutaatiot muodostavat ryhmän, jossa neutraalialkiona on kaikki alkiot paikallaan pitävä identtinen permutaatio.

Ryhmän toiminta yleistää permutaation käsitettä. Kaikille ryhmän alkioille voidaan määritellä tapa, jolla niiden oletetaan vaikuttavan jonkin joukon alkioihin. Tämän tavan tulee olla sopusoinnussa ryhmän rakenteen kanssa; esimerkiksi neutraalialkion tulisi pitää kaikki alkiot paikallaan. Toimintojen avulla saadaan tietoa ryhmän rakenteesta ainakin kahdella tavalla. Ensinnäkin ryhmän toiminnan kautta voidaan saada ryhmälle esitys esimerkiksi vektoriavaruuden lineaarikuvauksina, jolloin ryhmää päästään tutkimaan helposti käsiteltävien matriisien avulla. Toisaalta ryhmällä voi olla erilaisia toimintoja myös itsessään, ja näiden toimintojen tutkiminen ratkaisee suoraan monia ryhmän rakenteeseen liittyviä kysymyksiä.

**2.1. Toiminnan määritelmä.** Oletetaan seuraavassa, että $G$ on ryhmä ja $X$ jokin joukko. Merkitään symbolilla $X^X$ kaikkien kuvausten $X \to X$ joukkoa.

Määritelmä 2.1. Kuvausta $\varphi : G \to X^X$, $g \mapsto f_g$, nimitetään ryhmän $G$ *vasemmanpuoleiseksi toiminnaksi joukossa* $X$, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(T1) $f_e = \mathrm{id}_X$, missä $e$ on neutraalialkio
(T2) $f_{gh} = f_g \circ f_h$ kaikilla $g, h \in G$.

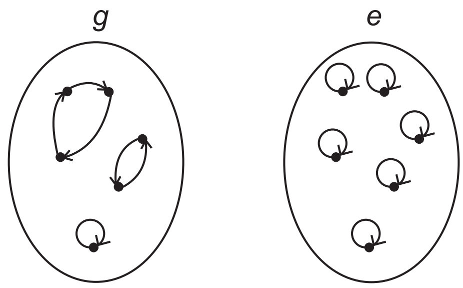
Vastaavasti voidaan määritellä *oikeanpuoleinen toiminta* korvaamalla jälkimmäinen ehto ehdolla (T2') $f_{gh} = f_h \circ f_g$.

Yllä oleva määritelmä soveltuu sellaisenaan myös monoidille. Käänteisalkioiden olemassaolosta kuitenkin seuraa, että $f_g \circ f_{g^{-1}} = f_{g \cdot g^{-1}} = f_e = \mathrm{id}$, joten jokainen $f_g$ on kääntyvä. Jokainen ryhmän alkio vastaa siis jotain bijektiota $X \to X$, eli kuvauksen $\varphi$ maalijoukko voidaan rajoittaa permutaatioryhmään $\mathrm{Sym}(X)$. Tällöin $\varphi$:stä tulee homomorfismi.

Yleensä on tapana merkitä vasemmanpuoleista toimintaa yksinkertaisemmin kertolaskun tapaan: $f_g(x) = gx$. (Joskus saatetaan käyttää selvyyden vuoksi merkintää $g.x$.) Tällöin vasemmanpuoleisen toiminnan ehdoiksi tulee

(T1) $ex = x$ kaikilla $x \in X$
(T2) $(gh)x = g(hx)$ kaikilla $g, h \in G$ ja $x \in X$.

Oikeanpuoleinen toiminta kirjoitetaan vastaavasti oikeanpuoleiseksi kertolaskuksi $f_g(x) = xg$. Tällöin $x(gh) = (xg)h$.




KUVA 3. Ryhmän alkiot vastaavat permutaatioita

Esimerkkejä toiminnoista:

- Joukon $X$ permutaatioryhmä toimii joukossa $X$ luonnollisella tavalla: $\sigma x = \sigma(x)$ kaikilla permutaatioilla $\sigma$.
- Vektoriavaruuden kerroinkunnan kertolaskuryhmä $(K^*, \cdot)$ toimii vektoriavaruudessa skaalarikertolaskulla.
- Kääntyvien $n \times n$-reaalimatriisien ryhmällä $GL_n(\mathbb{R})$ on matriisikertolaskun määrittelemä toiminta avaruudessa $\mathbb{R}^n$.
- Jos $G$ on ryhmä, kaava $f_g : h \mapsto gh$ määrittelee $G$:n vasemmanpuoleisen toiminnan itsessään. Vastaavasti kaava $h \mapsto hg$ määrittelee oikeanpuoleisen toiminnan.
- Jos $H \leq G$, kaava $xH \mapsto (gx)H$ määrittelee $G$ toiminnan $H$:n sivuluokkien joukossa.
- Jos $G$ on ryhmä, kaava $f_g : h \mapsto ghg^{-1}$ määrittelee myös toiminnan joukossa $G$. Tätä toimintaa kutsutaan *konjugoinniksi*. Tällä toiminnalla on se ominaisuus, että jokainen $f_g$ on homomorfismi.
- Jos $x \mapsto gx$ on jonkin ryhmän vasemmanpuoleinen toiminta, niin kaava $xg = g^{-1}x$ määrittelee erään oikeanpuoleisen toiminnan. Tämä seuraa siitä, että $x(gh) = (gh)^{-1}x = h^{-1}(g^{-1}x) = (xg)h$.

Joukkoa, jossa on määritelty ryhmän $G$ toiminta, voidaan kutsua *$G$-joukoksi*. Kahden $G$-joukon välinen kuvaus $f : X \to Y$ on *$G$-morfismi*, jos

$$g.f(x) = f(g.x) \quad \text{kaikilla } g \in G \text{ ja } x \in X.$$

Esimerkiksi $K$-kertoimisten vektoriavaruuksien väliset lineaarikuvaukset ovat $K^*$-morfismeja.

**2.2. Radat ja vakauttajat.** Oletetaan, että on määritelty ryhmän $G$ toiminta joukossa $X$. Osajoukkoa $Y$ kutsutaan *vakaaksi*, jos $gy \in Y$ kaikilla $g \in G$ ja $y \in Y$. Jos osajoukko on vakaa, voidaan siinä määritellä $G$:n toiminta rajoittamalla alkuperäistä toimintaa. Minimaalisia vakaita osajoukkoja kutsutaan radoiksi.

MÄÄRITELMÄ 2.2. Alkion $x \in X$ *rata* on joukko

$$Gx = \{gx \mid g \in G\}.$$

Jos toimivia ryhmiä on useita, rataa voi kutsua täsmällisemmin *$G$-radaksi*.

Radat muodostavat joukon $X$ osituksen; vastaava ekvivalenssirelaatio on

$$x \sim x' \iff x = gx' \quad \text{jollain } g \in G.$$

Jokainen ratojen yhdiste on vakaa osajoukko. Ratojen joukkoa merkitään $X/G$ (tai joskus $G\backslash X$, jos halutaan tehdä ero vasemman- ja oikeanpuoleisten toimintojen välillä).

Mikä tahansa osajoukko saadaan vakaaksi, kun rajoitutaan tarkastelemaan sopivaa aliryhmää.

Määritelmä 2.3. Osajoukon $Y \subset X$ *vakauttaja* on

$$G_Y = \{g \in G \mid gy \in Y \text{ kaikilla } y \in Y\}.$$

Jos $Y = \{y\}$, merkitään myös $G_Y = G_y$ ja puhutaan alkion $y$ *kiinnittäjästä.*

Alkioiden kiinnittäjät[5] ovat aina $G$:n aliryhmiä, mutteivät välttämättä normaaleja. Kiinnittäjä voi vakauttaa suurempiakin osajoukkoja: esimerkiksi ryhmän kertolaskutoiminta itsessään ($g.h = gh$) on sellainen, että jokaisen neutraalialkiosta poikkeavan alkion $h$ kiinnittäjä on $G_h = \{e\}$, joka tietysti kiinnittää kaikki ryhmän alkiot.

Esimerkkejä:

- Vektoriavaruuden $V$ skalaarikertolaskussa jokaisen nollasta poikkeavan vektorin rata on origon kautta kulkeva suora. Joukko $V \setminus \{\overline{0}\}$ on vakaa ryhmän $K^*$ toiminnassa. Ositusta $P(V) = (V \setminus \{\overline{0}\})/K^*$ kutsutaan vektoriavaruuden $V$ *projektiiviseksi avaruudeksi.*
- Ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ toiminnassa aliavaruuden $\langle v \rangle \subset \mathbb{R}^n$ (origon kautta kulkeva suora) vakauttaja on niiden matriisien joukko, joilla on ominaisvektorina $v$. Toisaalta esim. origokeskisen ympyrän vakauttaja on ns. *ortogonaalinen ryhmä* $O_n(\mathbb{R})$. Tähän aliryhmään kuuluvat ne matriisit, joiden sarakkeet muodostavat ortonormaalin vektorijoukon.
- Ajatellaan ryhmän $GL_2(\mathbb{R})$ toimintaa tasossa. Origokeskisen tasasivuisen kolmion vakauttaja on kolmion *symmetriaryhmä.* Voidaan osoittaa, että tämä on isomorfinen ryhmän $S_3$ kanssa. Tällä tavoin saadaan ryhmän $S_3$ esitys tason lineaarikuvauksina.
- Merkitään $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Määritellään permutaatioryhmän $S_n$ toiminta pareilla $\{a, b\}$, missä $a \neq b$, seuraavasti: $\sigma\{a, b\} = \{\sigma a, \sigma b\}$. Jos parien joukko $E$ tulkitaan jonkin verkon särmiksi, niin $E$:n vakauttaja on kyseisen verkon automorfismiryhmä.

Kiinnittäjän $G_x$ alkiot pitävät $x$:n paikallaan, ja kukin kiinnittäjän sivuluokka vastaa jotain alkiota $x$:n radalla. Tämä todistetaan seuraavassa.

Lause 2.4 (Rata-vakauttajalause). *Olkoon $X$ jokin $G$-joukko, ja $x \in X$. Tällöin on olemassa bijektio $f : G/G_x \to Gx$, jolle pätee $gG_x \mapsto gx$.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että mainittu $f$ on hyvin määritelty. Jos $g$ ja $g'$ ovat samassa sivuluokassa, niin $g = g'h$ jollain $h \in G_x$. Alkio $h$ kiinnittää

[5] Yleisen osajoukon kiinnittäjä on alimonoidi, muttei välttämättä aliryhmä, ellei osajoukko tai kiinnittäjä itse ole äärellinen.

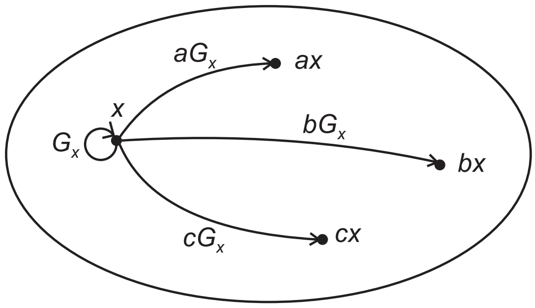
$x$:n, joten $gx = g'(hx) = g'x$. Siispä voidaan määritellä kuvaus $f : gG_x \mapsto gx$. Selvästikin $f$ on surjektio radalle $Gx$.

Osoitetaan vielä, että $f$ on injektio. Jos $gx = hx$ joillain $g, h \in G$, niin

$$h^{-1}gx = h^{-1}hx = ex = x,$$

eli alkio $h^{-1}g$ kiinnittää $x$:n. Näin ollen $h^{-1}g \in G_x$, mistä seuraa, että $g$ ja $h$ kuuluvat samaan kiinnittäjän sivuluokkaan. □

HUOMAUTUS 2.5. Jos määritellään $G$:n luonnollinen toiminta $g.hG_x = (gh)G_x$ kiinnittäjän $G_x$ sivuluokkien joukossa, voidaan osoittaa, että edellisen lauseen bijektio $f$ on itse asiassa $G$-joukkojen isomorfismi.




KUVA 4. Kiinnittäjän sivuluokat vastaavat yksi yhteen radan alkioita

MÄÄRITELMÄ 2.6. Ryhmän $G$ toimintaa joukossa $X$ sanotaan *transitiiviseksi*, jos kaikilla $x, y \in X$ löytyy jokin $g \in G$, jolle $gx = y$. Tällöin sanotaan myös, että $G$-joukko $X$ on *homogeeninen*.

Jokainen rata on homogeeninen joukko. Toisaalta ryhmä toimii transitiivisesti, jos ja vain jos joukko $X$ on jokaisen alkionsa rata. Transitiivisen toiminnan tapauksessa rata-vakauttajalauseesta saadaan hyödyllinen seuraus.

LAUSE 2.7. *Oletetaan, että ryhmä $G$ toimii transitiivisesti joukossa $X$. Olkoon $H$ jonkin alkion kiinnittäjä. Tällöin*[6]

$$|X| = [G : H].$$

TODISTUS. Merkitään $H$:n kiinnittämää alkiota $x$. Rata-vakauttajalauseesta 2.4 saadaan bijektio $Gx \to G/H$. Koska toiminta on transitiivista, pätee $Gx = X$, josta väite seuraa. □

KOROLLAARI 2.8. *Oletetaan, että $G$ toimii joukossa $X$ (ei välttämättä transitiivisesti). Olkoon $T$ kaikkien $G$-ratojen* edustajisto, *eli joukko, joka sisältää jokaisesta radasta täsmälleen yhden alkion. Tällöin pätee*

$$|X| = \sum_{x \in T} [G : G_x].$$

[6]Aliryhmän indeksi on määritelty vain äärellisessä tapauksessa. Lauseen todistus kuitenkin toimii sellaisenaan myös äärettömillä mahtavuuksilla.

TODISTUS. Jokainen rata $Gx$ on homogeeninen joukko, joten edellisen lauseen mukaan $|Gx| = [G : G_x]$. Tulos seuraa siitä, että radat muodostavat joukon $X$ osituksen. □

ESIMERKKI 2.9. Ryhmät $S_3$ ja $S_2$ toimivat luonnollisesti joukoissa $\{1, 2, 3\}$ ja $\{1, 2\}$. Näiden toimintojen avulla voidaan tuloryhmälle $S_3 \times S_2$ määritellä toiminta joukossa $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ seuraavasti:

$$(\sigma_1, \sigma_2)n = \begin{cases} \sigma_1(n), & \text{jos } n \in \{1, 2, 3\}, \\ \sigma_2(n-3) + 3, & \text{jos } n \in \{4, 5\}. \end{cases}$$

Ryhmän $S_3$ alkiot siis toimivat tavalliseen tapaan joukossa $\{1, 2, 3\}$, ja ryhmän $S_2$ ainoa 2-sykli $(12)$ vaihtaa alkiot 4 ja 5 keskenään. Tämä toiminta ei ole transitiivista: alkion 1 rata on joukko $\{1, 2, 3\}$, ja alkion 4 rata on joukko $\{4, 5\}$.

Alkion 1 kiinnittäjä on aliryhmä

$$G_1 = \{(\mathrm{id}, \mathrm{id}),\ (\mathrm{id}, (12)),\ ((23), \mathrm{id}),\ ((23), (12))\},$$

joka on isomorfinen Kleinin neliryhmän kanssa. Sen kolme sivuluokkaa ovat $G_1$, $((12), \mathrm{id})G_1$ ja $((132), \mathrm{id})G_1$, jotka vastaavat radan alkioita 1, 2 ja 3.

Koska jokainen muotoa $(\sigma, (12))$ oleva pari liikuttaa alkiota 4, tämän alkion kiinnittäjä $G_4$ sisältyy aliryhmään $S_3 \times \{\mathrm{id}\}$. Toisaalta edellisen lauseen mukaan

$$|N_5| = [G : G_1] + [G : G_4] = 12/4 + 12/|G_4| = 3 + 12/|G_4|,$$

joten kiinnittäjässä $G_4$ on kuusi alkiota. Siispä $G_4 = S_3 \times \{\mathrm{id}\}$.

**2.3. Konjugointi.** Ryhmässä $G$ voidaan määritellä $G$:n konjugointitoiminta $f_g : h \mapsto ghg^{-1}$. Koska jokainen kuvaus $f_g$ on homomorfismi, aliryhmät kuvautuvat konjugoitaessa aliryhmiksi. Näin ollen konjugointitoiminta voidaan määritellä myös ryhmän aliryhmien joukossa. Molemmissa tapauksissa alkion kuvia toiminnassa nimitetään sen *konjugaateiksi*. Konjugaatit ovat siis joko muotoa ${}^g h = ghg^{-1}$ (alkioiden konjugointi) tai ${}^g H = gHg^{-1}$ (aliryhmien konjugointi).

Jos $G$ toimii konjugoimalla itsessään, ratoja kutsutaan *konjugaattiluokiksi* ja alkioiden kiinnittäjiä *keskittäjiksi*. Alkion $x$ konjugaattiluokkaa merkitään ${}^G x$. Kaksi alkiota kuuluvat samaan konjugaattiluokkaan, jos ne ovat toistensa konjugaatteja. Neutraalialkio muodostaa aina oman konjugaattiluokkansa. Seuraava tulos kertoo konjugaattiluokkien tärkeydestä; todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

LAUSE 2.10. *Jokainen normaali aliryhmä on konjugaattiluokkien yhdiste.*

Alkion $x$ keskittäjää ryhmässä $G$ merkitään

$$C_G(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}.$$

Konjugointitoiminnan symmetrian vuoksi $g \in C_G(h)$ jos ja vain jos $h \in C_G(g)$. Koska

$$C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\},$$

alkion $x$ keskittäjää voidaan luonnehtia myös niin, että se koostuu täsmälleen niistä alkioista, jotka kommutoivat $x$:n kanssa. Keskittäjien leikkausta

$$Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x) = \{g \in G \mid gxg^{-1} \text{ kaikilla } x \in G\}$$

nimitetään *keskukseksi*. Keskuksen alkiot kommutoivat kaikkien ryhmän alkioiden kanssa, niillä konjugoiminen pitää kaikki alkiot paikallaan, eivätkä ne itse liiku mihinkään muilla alkioilla konjugoitaessa. Tästä seuraa muun muassa, että $Z(G)$ on ryhmän $G$ normaali aliryhmä.

Jos $G$ toimii konjugoimalla omien aliryhmiensä joukossa, ratoja kutsutaan edelleen (aliryhmien) *konjugaattiluokiksi*. Aliryhmien kiinnittäjiä sen sijaan *normalisoijiksi*, ja merkitään

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} = \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

Nimitys selviää määritelmästä: Jos $g$ on normalisoijan alkio, niin $g$:hen liittyvät vasen ja oikea $H$:n sivuluokka yhtyvät. Tästä saadaan normalisoijalle luonnehdinta, jonka mukaan aliryhmän $H$ normalisoija on *suurin aliryhmä, jossa $H$ on normaali.* Esimerkiksi $N_G(H) = G$ täsmälleen silloin, kun $H \trianglelefteq G$.

Edellä todistetuista lauseista 2.7 ja 2.8 saadaan nyt seuraavat versiot.

Lause 2.11. *Alkion $x$ konjugaattiluokan koko on*

$$\left|{}^G x\right| = [G : C_G(x)].$$

Lause 2.12 (Luokkayhtälö). *Olkoon $C$ jokin ryhmän $G$ konjugaattiluokkien edustajisto. Tällöin*

$$|G| = \sum_{x \in C} [G : C_G(x)].$$