Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 2
to 28.5.2009

Tehtävät 1–3 liittyvät toisiinsa, ja ne kannattaa tehdä numerojärjestyksessä.

1. Mikä on ryhmän $GL_2(3)$ kertaluku? Millaisilta näyttävät sen alkiot? Mitkä ovat niiden kertaluvut?

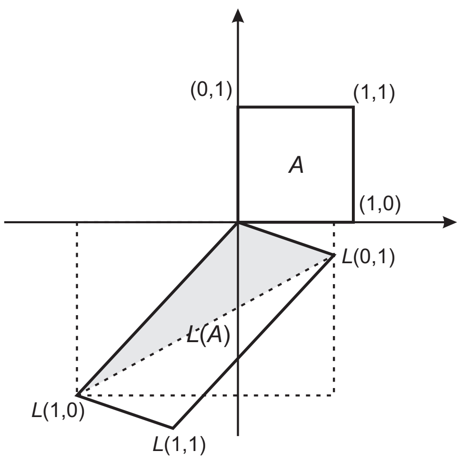
   Neuvo. Työ helpottuu, kun käytät apuna seuraavalla sivulla olevaa jaottelua ja muistat, että matriisilla ja sen transpoosilla on sama kertaluku. Laske eri luokkiin kuuluvien matriisien potensseja ja yritä löytää sääntöjä.

2. Mitkä alkioista kuuluvat aliryhmään $SL_2(3)$? Mikä on tämän aliryhmän kertaluku?

3. Miltä näyttävät tekijäryhmän $PGL_2(3)$ alkiot? Mitkä ovat niiden kertaluvut? Mikä on tämän tekijäryhmän kertaluku? Miltä näyttävät tekijäryhmän $PSL_2(3)$ alkiot? Mitkä ovat niiden kertaluvut? Mikä on tämän tekijäryhmän kertaluku?

   Ovatko ryhmät $SL_2(3)$ ja $PGL_2(3)$ isomorfiset?

4. Olkoon $L \in GL_2(\mathbb{R})$. Tutkitaan $\mathbb{R}^2$:n yksikköneliön kuvaa kuvauksessa L. Osoita, että kuvan pinta-ala on $|\det(L)|$. (Ks. oheinen kuva.)



5. a) Osoita, että ryhmässä $GL_n(K)$ jokainen alkio voidaan ilmaista diagonaalimatriisin ja ryhmän $SL_n(K)$ alkion tulona.

   b) Osoita, että kunnan K ollessa algebrallisesti suljettu voidaan ryhmässä $GL_n(K)$ jokainen alkio ilmaista skalaarimatriisin ja ryhmän $SL_n(K)$ alkion tulona.

6. a) Osoita, että ryhmät $GL_n(2)$, $SL_n(2)$, $PGL_n(2)$ ja $PSL_n(2)$ ovat isomorfisia.

   b) Osoita, että ryhmät $SL_{2n+1}(3)$ ja $PSL_{2n+1}(3)$ ovat isomorfisia.

Eräs ryhmän $GL_2(3)$ alkioiden jaottelu

1. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$
2. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$
3. $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $a \neq 0$
4. $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 1$
5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
6. $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$
7. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Jokaiseen luokkaan kuuluu mainittujen matriisien A lisäksi niiden transpoosit $A^\top$ sekä vastamatriisit $-A$.