Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 2, ratkaisuehdotus 8 sivua

**Huom.** Tehtävien 1–3 tulokset on kerätty taulukkoon sivulla 5.

1. Mikä on ryhmän $GL_2(3)$ kertaluku? Millaisilta näyttävät sen alkiot? Mitkä ovat niiden kertaluvut?

   *Ratkaisu.* Lasketaan ensin ryhmän kertaluku käyttäen luentomateriaalissa annettua kaavaa:

$$\begin{aligned}|GL_2(3)| &= (q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})\\ &= (3^2-1)(3^2-3) = 8\cdot 6 = 48.\end{aligned}$$

   Ruvetaan sitten tutkimaan alkioiden kertalukua. Käytetään tässä hyväksi tehtäväpaperissa ollutta jaottelua:

   1. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$
   2. $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$
   3. $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $a \neq 0$
   4. $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 1$
   5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
   6. $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$
   7. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

   Jokaiseen luokkaan kuuluu mainittujen matriisien $A$ lisäksi niiden transpoosit $A^\top$ sekä vastamatriisit $-A$.

   Nyt voidaan käydä alkiot läpi yksi luokka kerrallaan, mutta listataan aluksi muutama laskuvaivaa vähentävä yleispätevä sääntö:

   (i) Jos $A^n = I$, niin alkion $A$ kertaluku jakaa luvun $n$.

   (ii) Jos matriisin $A$ kertaluku $k$ on parillinen, niin $-A$:lla on sama kertaluku. Jos $k$:n kertaluku on pariton, niin $-A$:n kertaluku on $2k$.

   (iii) Matriisilla $A$ ja sen transpoosilla $A^\top$ on sama kertaluku.

   (iv) Matriiseilla $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ ja $\left[\begin{smallmatrix} d & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right]$ on sama kertaluku.

   Ensimmäinen sääntö seuraa jakoyhtälöstä: jos $A$:n kertaluku on $k$ ja $n = qk + r$, missä $r < k$, niin $A^r = A^n(A^k)^{-q} = I$, mikä on mahdotonta, ellei $r = 0$. Toinen sääntö seuraa siitä, että $(-A)^n = (-1)^n A^n$, kolmas puolestaan siitä, että $(A^n)^\top = (A^\top)^n$. Kolmas sääntö voidaan nähdä $2\times 2$-matriisien kertolaskukaavasta, mutta ehkä elegantimpaa on todeta, että konjugoiminen (kannanvaihto) ei muuta kertalukua, sillä $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$, ja toisaalta

$$\begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix} = \left( P \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} P^{-1} \right)^{\top},$$

missä $P = P^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

Käydään nyt luokat läpi. Merkitään joka kohdassa $A$:lla jaottelussa luokan kohdalla mainittua ensimmäistä esimerkkimatriisia, ellei toisin mainita. Toisen esimerkkimatriisin kertaluku on säännön (iv) perusteella sama kuin ensimmäisen. Transpooseilla on myös sama kertaluku, mutta vastamatriisien kertaluvut täytyy erikseen tutkia.

**Luokka 1** (10 alkiota). Olkoon aluksi $a = 1$. Nyt on helppo nähdä, että

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriisin potenssi on siis yksikkömatriisi $I$, joss $b = 0$ tai $3|n$. Kertaluku on siis 1 jos $b = 0$, muuten 3.

Toisaalta, jos $a = -1$, niin $A = \left[\begin{smallmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right] = -\left[\begin{smallmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Kyseessä on siis ensimmäisen tapauksen vastamatriisi, ja tulos seuraa säännöstä (ii). Kertaluku on 2 jos $b = 0$, muuten 6.

**Luokka 2** (10 alkiota). Huomataan, että

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = a^2 I.$$

Koska $a^2 = 1$ kaikilla $\mathbb{F}_3 \setminus \{0\}$, niin kertaluku on 2.

**Luokka 3** (4 alkiota). Nähdään, että

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI.$$

Jos $a = 1$, niin kertaluku on 2. Jos taas $a = -1$, niin $A^4 = (-I)^2 = I$, joten säännön (i) perusteella kertaluku on 4 (koska $A^2 = -I$).

Molemmat kertaluvut olivat parillisia, joten vastamatriiseilla on tässä tapauksessa sama kertaluku.

**Luokka 4** (8 alkiota). Olkoon ensin $a = -1$. Nyt

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I.$$

Nähdään, että kertaluku on 4. Toisaalta, jos $a = 0$, niin

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I.$$

Näin ollen $A^8 = I$, ja $A$:n kertaluku on 8.

Jälleen kertaluvut olivat parillisia, joten vastamatriiseilla on samat kertaluvut.

**Luokka 5** (4 alkiota). Tässä tapauksessa

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ja tilanne palautuu luokkaan 4. Matriisin $A^2$ kertaluku on 4, joten $A$:n kertaluku on 8. Vastamatriisilla on sama kertaluku.

**Luokka 6** (8 alkiota). Olkoon ensin $a = 1$. Nyt

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I.$$

Nähdään, että $A^6 = I$, joten kertaluku on 6.

Kun $a = -1$, niin

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^\top = -A^\top,$$

ja tilanne palautuu edelliseen tapaukseen. Nähdään, että $B^2 = (A^2)^\top \neq I$, mutta $B^3 = -(A^3)^\top = -(-I)^\top = I$. Siispä kertaluku on 3.

**Luokka 7** (4 alkiota). Tässä tapauksessa

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

joten tilanne palautuu luokkaan 3. Matriisin $A^2$ kertaluku on täten 4, joten $A$:n kertaluku on 8. Vastamatriisilla on sama kertaluku.

2. Mitkä alkioista kuuluvat aliryhmään $SL_2(3)$? Mikä on tämän aliryhmän kertaluku?

   *Ratkaisu.* Erityisen lineaarisen ryhmän kertaluku on luentojen kaavan mukaan

   $$|SL_2(3)| = \frac{GL_2(3)}{q-1} = \frac{48}{2} = 24.$$

   Tähän aliryhmään kelpaavat koko ryhmän $GL_2(3)$ alkioista ne, joiden determinantti on 1. Koska kunta on kolmialkioinen, ainoa toinen vaihtoehto determinantin arvolle on -1. Käydään jälleen alkiot läpi luokittain.

   **Luokka 1.** Determinantti on $a^2 = 1$, joten kaikki alkiot kelpaavat aliryhmään $SL_2(3)$.

   **Luokka 2.** Determinantti on $-a^2 = -1$, joten mitkään alkiot eivät kelpaa.

   **Luokka 3.** Determinantti on $-a$. Alkio kelpaa, joss $a = -1$. Tällaisia on puolet luokan alkioista eli 2 kappaletta.

**Luokka 4.** Determinantti on $a-1$. Alkio kelpaa, joss $a=-1$. Tällaisia on 4 kpl.

**Luokka 5.** Determinantti on aina $-1$, joten mikään luokan alkioista ei kelpaa.

**Luokka 6.** Determinantti on 1. Kaikki alkiot kelpaavat.

**Luokka 7.** Determinantti on $-1$. Mikään alkio ei kelpaa.

3. Miltä näyttävät tekijäryhmän $PGL_2(3)$ alkiot? Mitkä ovat niiden kertaluvut? Mikä on tämän tekijäryhmän kertaluku? Miltä näyttävät tekijäryhmän $PSL_2(3)$ alkiot? Mitkä ovat niiden kertaluvut? Mikä on tämän tekijäryhmän kertaluku?

   Ovatko ryhmät $SL_2(3)$ ja $PGL_2(3)$ isomorfiset?

   *Ratkaisu.* Projektiivisen lineaarisen ryhmän $PGL_2(3)$ koostuvat ryhmän $GL_2(3)$ keskuksen sivuluokista. Tämä keskus koostuu skalaarimatriiseista, joita on kaksi. Keskus on siis $Z=\{I,-I\}$. Tämän tekijäryhmän kertaluku on luentojen kaavan mukaan

$$|PGL_2(3)| = \frac{|GL_2(3)|}{q-1} = \frac{48}{2} = 24.$$

Alkiot $A$ ja $B$ kuuluvat samaan sivuluokkaan, joss $A = B(\pm I) = \pm B$. Merkitään tällöin $A \equiv B$. Alkion $A$ kertaluku on sellainen $n$, jolla $A^n \equiv I$ eli $A^n = \pm I$. Kertalukujen määrittämiseksi käydään jälleen alkiot läpi luokittain ja käytetään hyväksi tehtävässä 1 suoritettuja laskuja. (Koska jokainen luokka sisältää omat vastamatriisinsa, jokaisen luokan koko puolittuu siirryttäessä ryhmään $PGL_2(3)$.)

**Luokka 1.** Koska

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -1 & -b \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

nämä eri tapaukset samastuvat, ja kertaluvuksi tulee 1, jos $b=0$, muuten 3.

**Luokka 2.** Kertaluku on edelleen 2.

**Luokka 3.** Nyt $A^2 = aI \equiv I$, joten kertaluku on 2.

**Luokka 4.** Jos $a=-1$, niin $A^2=-I$, joten kertaluku on 2. Toisaalta, jos $a=0$, niin $A^4=-I$, joten kertaluku on 4.

**Luokka 5.** Tilanne palautuu luokkaan 4, ja $A^4=-I$. Kertaluku on siis 4.

**Luokka 6.** Jos $a=1$, niin $A^3=-I$, ja kertaluku on 3. Jos taas $a=-1$, niin

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^\top = A^\top.$$

Näin ollen tässäkin tapauksessa kertaluvuksi tulee 3.

**Luokka 7.** Koska $A^4 = -I$, niin kertaluku on 4.

Nyt nähdään, että ryhmät $SL_2(3)$ ja $PGL_2(3)$ eivät ole isomorfiset. Ryhmässä $SL_2(3)$ on nimittäin alkioita, joiden kertaluku on 6 (luokassa 6), mutta ryhmässä $PGL_2(3)$ korkein kertaluku on 4.

Projektiivisen erityisen lineaarisen ryhmän alkioina ovat keskuksen $Z_S = Z(SL_2(3))$ sivuluokat $A \cdot Z_S$, missä $A \in SL_2(3)$. Koska $\det(-I) = (-1)^2 = 1$, nähdään, että $Z(SL_2(3)) = Z(GL_2(3)) = \{I, -I\}$. Sivuluokat ovat siis samoja kuin ryhmässä $PGL_2(3)$. Toisaalta ryhmän $SL_2(3)$ matriisit on lueteltu tehtävässä 2. Ryhmän $PSL_2(3)$ kertaluku on luentojen kaavan mukaan

$$|PSL_2(3)| = \frac{SL_2(3)}{\mathrm{syt}(q-1, n)} = \frac{24}{\mathrm{syt}(2,2)} = 12.$$

Kootaan vielä lopuksi kaikki saadut tulokset taulukkoon.

| luokka | 1. | | 2. | 3. | | 4. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a = 1$ | $a = -1$ | | $a = 1$ | $a = -1$ | $a = -1$ | $a = 0$ |
| alkioita | 5 | 5 | 10 | 2 | 2 | 4 | 4 |
| kertaluku $GL_2(3)$:ssa | $3^{(*)}$ | $6^{(*)}$ | 2 | 2 | 4 | 4 | 8 |
| $\in SL_2(3)$? | kyllä | kyllä | ei | ei | kyllä | kyllä | ei |
| kertaluku $PGL_2(3)$:ssa | $3^{(*)}$ | - | 2 | 2 | - | 2 | 4 |

(*) jos matriisi on $I$ tai $-I$, niin kertaluvut ovat $GL_2(3)$:ssa 1 ja 2 ja $PGL_2(3)$:ssa 1

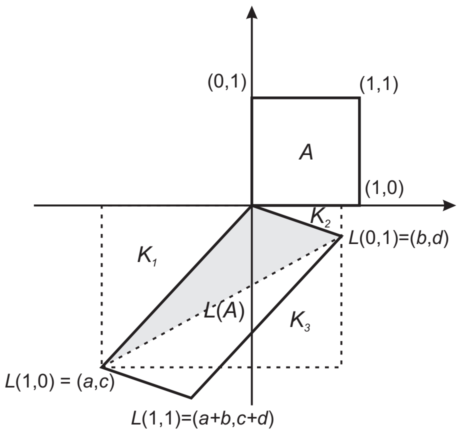
| luokka | 5. | 6. | | 7. |
|---|---|---|---|---|
| | | $a = 1$ | $a = -1$ | |
| alkioita | 4 | 4 | 4 | 4 |
| kertaluku $GL_2(3)$:ssa | 8 | 6 | 3 | 8 |
| $\in SL_2(3)$? | ei | kyllä | kyllä | ei |
| kertaluku $PGL_2(3)$:ssa | 4 | 3 | - | 4 |

4. Olkoon $L \in GL_2(\mathbb{R})$. Tutkitaan $\mathbb{R}^2$:n yksikköneliön kuvaa kuvauksessa $L$. Osoita, että kuvan pinta-ala on $|\det(L)|$.

*Ratkaisu.* Merkitään lineaarikuvauksen $L$ matriisia

$$L = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

jolloin $\det L = ad - bc$. Tässä kuvauksessa kantavektorien $(1,0)$ ja $(0,1)$ kuvat ovat $(a,c)$ ja $(b,d)$.




Tarkastellaan ensin kuvan mukaista erikoistapausta, jossa kantavektorit kuvautuvat 3. ja 4. neljännekseen niin, että $d > c$. Kuvajoukko $L(A)$ muodostaa suunnikkaan. Puolet tämän suunnikkaan alasta mahtuu kolmioon, joka yhdistettynä kolmioihin $K_1$, $K_2$ ja $K_3$ täyttää tietyn suorakulmion. Kuvasta nähdään helposti, että kyseisen suorakulmion ala on $(a-b)c$. Kolmioiden alat ovat puolestaan

$$\operatorname{area}(K_1) = \frac{1}{2}ac, \quad \operatorname{area}(K_2) = -\frac{1}{2}bd \quad \text{ja} \quad \operatorname{area}(K_3) = \frac{1}{2}(b-a)(d-c).$$

Näin ollen suunnikkaan $L(A)$ alaksi saadaan

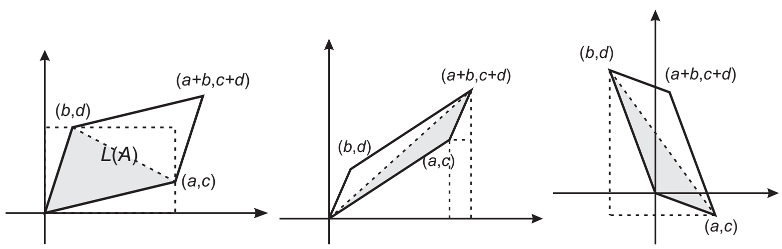
$$2\left((a-b)c - \frac{1}{2}\big(ac - bd + (b-a)(d-c)\big)\right) = ad - bc.$$

Käsiteltyä tapausta voidaan yleistää käyttämällä seuraavia lineaarimuunnoksia:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nämä muunnokset permutoivat koordinaattiakseleita. Kertomalla niillä kuvausta $L$ voidaan mikä tahansa tapaus, jossa kantavektorit kuvautuvat vierekkäisiin neljänneksiin, palauttaa yllä käsiteltyyn tapaukseen. Lisäksi niiden determinantti on $\pm 1$, joten tehtävän tulos ei kerrottaessa muutu.

Lisäksi on vielä käsiteltävä ne tapaukset, joissa kantavektorit kuvautuvat samaan tai vastakkaisiin neljänneksiin. Nämä voi käsitellä samoin kuin yllä olevan tapauksen käyttämällä seuraavia kuvia sekä tarvittaessa sopivia muunnoksia.



5. a) Osoita, että ryhmässä $GL_n(K)$ jokainen alkio voidaan ilmaista diagonaalimatriisin ja ryhmän $SL_n(K)$ alkion tulona.
   b) Osoita, että kunnan $K$ ollessa algebrallisesti suljettu, voidaan ryhmän $GL_n(K)$ alkiot kirjoitaa skalaarimatriisin ja $SL_n(K)$:n alkion tulona.

*Todistus.* **(a)** Oletetaan, että $g \in GL_n(K)$ ja $\det(g) = \alpha$. Olkoon nyt

$$a = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jolloin $\det(a) = \alpha$. Olkoon $b$ matriisi, joka on saatu $g$:stä kertomalla sen ensimmäisen rivin alkiot luvulla $\alpha^{-1}$. Tällöin $\det(b) = \alpha^{-1}\alpha = 1$, joten $b \in SL_n(K)$. Toisaalta matriisin $ab$ mielivaltainen alkio on

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \begin{cases} \alpha b_{ij}, & \text{jos } i = 1 \\ b_{ij} & \text{muuten.} \end{cases}$$

Joka tapauksessa nähdään, että $ab = g$.

**(b)** Väite todistetaan samalla tavalla kuin (a)-kohdassa. Nyt vain matriisiksi $a$ valitaan skalaarimatriisi $\beta I_n$, missä $\beta$ on sellainen, että $\alpha\beta^n - 1 = 0$. Tämä on mahdollista, koska $K$ on algebrallisesti suljettu. Tällöin $\det(a) = \beta^n = \alpha^{-1}$, kuten haluttiinkin. □

6. a) Osoita, että ryhmät $GL_n(2)$, $SL_n(2)$, $PGL_n(2)$ ja $PSL_n(2)$ ovat isomorfisia.
   b) Osoita, että ryhmät $SL_{2n+1}(3)$ ja $PSL_{2n+1}(3)$ ovat isomorfisia.

*Todistus.* **(a)** Käsiteltävät ryhmät muodostuvat $n \times n$-matriiseista, joiden alkiot ovat kunnassa $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, tai ovat tällaisten matriisiryhmien tekijäryhmiä. Ryhmä $\mathbb{F}_2^*$ on triviaali ryhmä, eli $\mathbb{F}_2^* = \{1\}$

Aloitetaan todistus osoittamalla, että $GL_n(2) = SL_n(2)$. Olkoon $g \in GL_n(2)$. Koska $g$:n determinantti on ryhmässä $\mathbb{F}_2^*$, sen on pakko olla 1. Siten $g \in SL_n(2)$ ja $GL_n(2) = SL_n(2)$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $GL_n(2) \cong PGL_n(2)$. Ryhmä $Z(GL_n(2))$ on isomorfinen ryhmän $F_2^*$ kanssa, joten siinä on vain yksi alkio. Siten $PGL_n(2) = GL_n(2)/Z(GL_n(2)) = GL_n(2)/\{1\} \cong GL_n(2)$.

Lopuksi huomataan vielä, että koska $GL_n(2) = SL_n(2)$, niin $PGL_n(2) = PSL_n(2)$. Nyt siis olemme osoittaneet, että

$$SL_n(2) = GL_n(2) \cong PGL_n(2) = PSL_n(2).$$

**(b)** Nyt kerroinkuntana on $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$, joten $\mathbb{F}_3^* = \{1, -1\}$. Ryhmän $SL_{2n+1}(3)$ keskus $Z(SL_{2n+1}(3))$ muodostuu skalaarimatriiseista $\alpha I_{2n+1}$, joille pätee $\det(\alpha I_{2n+1}) = \alpha^{2n+1} = 1$. Koska $(-1)^{2n+1} = -1$, voimme päätellä, että $Z(SL_{2n+1}(3)) = \{I\}$. Siten

$$PSL_{2n+1}(3) = SL_{2n+1}(3)/Z(SL_{2n+1}(3)) \cong SL_{2n+1}(3).$$

$\square$