3 Lineaariset ryhmät

3.1 Yleinen ja erityinen lineaarinen ryhmä

Seuraavaksi tutustumme klassista ryhmistä ensimmäiseen, yleiseen lineaariseen ryhmään. Tätä ryhmää Hermann Weyl on kutsunut nimellä "Her All-embracing Majesty".

Olkoon V K-kertoiminen n-ulotteinen vektoriavaruus.

Määritelmä 3.1. *Yleinen lineaarinen ryhmä* $GL(V)$ muodostuu avaruuden V lineaarisista automorfismeista. Ryhmän laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen, neutraalialkiona identtinen kuvaus ja käänteisalkioina käänteiskuvaukset.

Kuten edellisessä luvussa todettiin, lineaarikuvaukset voidaan samastaa matriisien kanssa. Yhtä hyvin voidaan siis sanoa, että yleinen lineaarinen ryhmä koostuu kääntyvistä $n \times n$-matriiseista, joiden alkiot ovat kunnassa K. Laskutoimituksena on matriisikertolasku. Tätä ryhmää merkitään $GL_n(K)$. Jos kunta K on äärellinen, voidaan kirjoittaa $GL_n(q)$, missä q on K:n kertaluku.

Lineaarikuvausten ja matriisien välillä ei tehdä tällä kurssilla suurtakaan eroa ja eri merkintöjen välillä saatetaan siirtyä siis melko huolettomasti.

Ne yleisen lineaarisen ryhmän alkiot, joiden determinantti on yksi, muodostavat aliryhmän, jota kutsutaan erityiseksi lineaariseksi ryhmäksi.

Määritelmä 3.2. *Erityinen lineaarinen ryhmä* on

$$SL(V) = \{g \in G \mid \det(g) = 1\}.$$

Samaan tapaan kuin edellä, myös erityiselle lineaariselle ryhmälle voidaan käyttää merkintöjä $SL_n(K)$ tai $SL_n(q)$.

Lause 3.3. *Ryhmä $SL_n(K)$ on $GL_n(K)$:n normaali aliryhmä.*

Todistus. Luvussa 2.4 todettiin, että determinanttikuvaus on homomorfismi ryhmältä $GL_n(K)$ ryhmälle K^*. Sen ydin on ryhmä $SL_n(K)$. Koska ydin on aina normaali aliryhmä, on lause todistettu. $\square$

Lause 3.4. *Ryhmä $GL_n(K)/SL_n(K)$ on isomorfinen ryhmän K^* kanssa.*

Todistus. Todistuksessa käytetään ryhmien homomorfialausetta. Kuten edellä todettiin, on determinanttikuvaus homomorfismi ryhmältä $GL_n(K)$ ryhmälle K^*. Se on surjektio, sillä jos $\alpha \in K^*$, niin esimerkiksi matriisin

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

determinantti on α.

Koska kuvauksen ydin on ryhmä $SL_n(K)$, niin ryhmien homomorfialauseen perustella ryhmät $GL_n(K)/SL_n(K)$ ja K^* ovat isomorfisia. $\square$

3.2 Projektiiviset lineaariset ryhmät

Yleisestä lineaarisesta ryhmästä löytyy muitakin kiinnostavia normaaleja aliryhmiä. Sen keskus $Z(GL_n(K))$ muodostuu skalaarimatriiseista ja on siten isomorfinen syklisen ryhmän K^* kanssa.

Lause 3.5. *Yleisen lineaarisen ryhmän keskus on*

$$Z(GL_n(K)) = \{\alpha I_n \mid \alpha \in K\}.$$

Todistus. Osoitetaan ensin, että kaikki skalaarimatriisit kuuluvat ryhmän $GL_n(K)$ keskukseen. Olkoon αI_n skalaarimatriisi ja $J \in GL_n(K)$. Huomataan, että $J(\alpha I_n) = \alpha J = (\alpha I_n)J$, joten $\alpha I_n \in Z(GL_n(K))$.

Osoitetaan seuraavaksi, että jokainen keskuksen alkio on skalaarimatriisi. Jos $n = 1$, niin väite on selvästikin totta, sillä kaikki matriisit ovat silloin skalaarimatriiseja. Voimme siis olettaa, että vektoriavaruuden $V = K^n$ dimensio on suurempi kuin yksi.

Olkoon $L \in Z(GL_n(K))$ jokin matriisi kannan $S = (v_1, \ldots, v_n)$ suhteen kirjoitettuna. Osoitetaan aluksi, että L on diagonaalimatriisi, eli että jokaisella $v_i \in S$ on olemassa sellainen $\alpha_i \in K^*$, että $Lv_i = \alpha_i v_i$. Tämä tehdään vastaoletuksen avulla. Oletetaan siis, että $v_i \in S$ on sellainen, että $Lv_i \notin \langle v_i \rangle$. Merkitään $Lv_i = u$. Valitaan kuvaus $M \in GL_n(K)$ niin, että $Mv_i = v_i$ ja $Mu = v_i + u$. Tämä voidaan tehdä, koska vektorit u ja v_i ovat lineaarisesti riippumattomia, kuten myös vektorit v_i ja $v_i + u$. Nyt $LMv_i = Lv_i = u$ ja $MLv_i = Mu = v_i + u$. Siten $MLv_i \neq LMv_i$, mistä seuraa, että $ML \neq LM$. Tämä on ristiriita, sillä $L \in Z(GL_n(K))$. Siispä L on diagonaalimatriisi.

Seuraavaksi osoitamme, että L on skalaarimatriisi. Olkoot $v_i, v_j \in S$. Oletetaan, että $\alpha_i, \alpha_j \in K^*$ ovat sellaisia, että $Lv_i = \alpha_i v_i$ ja $Lv_j = \alpha_j v_j$. Valitaan kuvaus $N \in GL(V)$ niin, että $Nv_i = v_j$, $Nv_j = -v_i$ ja $Nv_k = v_k$ kaikilla $k \neq i, j$. Nyt $LNv_i = Lv_j = \alpha_j v_j$ ja $NLv_i = \alpha_i N v_i = \alpha_i v_j$. Koska $L \in Z(GL_n(K))$, niin $LN = NL$ ja siten $\alpha_i = \alpha_j$. Tästä seuraa, että L on skalaarimatriisi. □

Vastaavasti erityisen lineaarisen ryhmän keskuksen muodostavat skalaarimatriisit, joiden determinantti on yksi.

Lause 3.6. *Erityisen lineaarisen ryhmän keskus on*

$$Z(SL_n(K)) = \{\alpha I_n \mid \alpha \in K, \alpha^n = 1\},$$

missä I_n on yksikkömatriisi

Todistus. Lause todistetaan samalla tavalla kuin ryhmän $GL_n(K)$ tapauksessa. On vain pidettävä huolta siitä, että kuvaukset M ja N voidaan valita ryhmästä $SL_n(K)$. Kuvauksen N determinantti on itse asiassa jo valmiiksi

1. Jos esimerkiksi $v_i = v_1$ ja $v_j = v_2$, niin N:n matriisi on

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin determinantti on 1.

Tutkitaan seuraavaksi kuvausta M. Oletetaan, että $\det(M) = a$. Valitaan uusi kuvaus M' siten, että se on muuten samanlainen kuin kuvaus M, mutta $M'v_i = a^{-1}v_i$. Tämä ei muuta lauseen todistusta mitenkään. Koska kuvaus M' on saatu kuvauksesta M kertomalla sarake i vakiolla a^{-1}, niin $\det(M') = a^{-1}\det(M) = 1$. Siten voimme käyttää ryhmän $SL(V)$ tapauksessa kuvausta M'. □

Koska ryhmän keskus on normaali aliryhmä, voidaan sen suhteen muodostaa tekijäryhmä. Lineaaristen ryhmien tapauksessa tätä tekijäryhmää kutsutaan projektiiviseksi yleiseksi lineaariseksi ryhmäksi.

Määritelmä 3.7. *Projektiivinen yleinen lineaarinen ryhmä* on tekijäryhmä

$$PGL_n(K) = GL_n(K)/Z(GL_n(K)).$$

Merkitään $Z_G = Z(GL_n(K))$. Ryhmä $PGL_n(K) = GL_n(K)/Z_G$ koostuu sivuluokista gZ_G, missä $g \in GL_n(K)$. Tiedämme, että ryhmän $GL_n(K)$ alkiot g_1 ja g_2 ovat samassa sivuluokassa jos ja vain jos $g_1 \in g_2Z_G$ eli jos ja vain jos $g_1 = g_2(\lambda I_n) = \lambda g_2$ jollakin $\lambda \in K^*$.

Tämä tarkoittaa sitä, että tekijäryhmää $PGL_n(K)$ voidaan ajatella ryhmänä $GL_n(K)$, missä alkiot g ja λg on samastettu kaikilla $\lambda \in K^*$. (Käytännössä se on siis kääntyvien $n \times n$-matriisien joukko, jossa on samastettu ne matriisit, jotka saadaan toisistaan jollakin skalaarilla kertomalla.)

Määritelmä 3.8. *Projektiivinen erityinen lineaarinen ryhmä* on tekijäryhmä

$$PSL_n(K) = SL_n(K)/Z(SL_n(K)).$$

Huomaa, että $PSL_n(K)$ ei ole ryhmän $PGL_n(K)$ aliryhmä. Ryhmältä $PSL_n(K)$ voidaan kuitenkin määritellä injektiivinen homomorfistmi ryhmälle $PGL_n(K)$, joten käytännössä ryhmää $PSL_n(K)$ voidaan käsitellä ryhmän $PGL_n(K)$ aliryhmänä.

Esimerkki 3.9. Ryhmän $GL_n(\mathbb{R})$ keskus $Z_G = Z(GL_n(\mathbb{R}))$ koostuu matriiseista αI_n, missä $\alpha \in \mathbb{R}$. Ryhmän $SL_n(\mathbb{R})$ keskuksessa $Z_S = Z(SL_n(\mathbb{R}))$ ovat puolestaan ylläolevista matriiseista ne, joille pätee $\alpha^n = 1$. Jos n on parillinen, niin tällaisia reaalilukuja on täsmälleen kaksi: 1 ja -1. Siten ryhmän $SL_n(\mathbb{R})$ keskus on $\{I_n, -I_n\}$. Jos taas n on pariton, niin ainoa ehdon toteuttava reaaliluku on -1, ja keskus on $\{I_n\}$.

Tutkitaan ensin miltä projektiivinen erityinen lineaarinen ryhmä näyttää, jos n on parillinen. Ryhmä $PSL_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{R})/Z_S$ koostuu sivuluokista gZ_S, missä $g \in SL_n(K)$. Tiedämme, että ryhmän $SL_n(K)$ alkiot g_1 ja g_2 ovat samassa sivuluokassa jos ja vain jos $g_1 \in g_2 Z_S$ eli jos ja vain jos $g_1 = g_2 I_n = g_2$ tai $g_1 = g_2(-I_n) = -g_2$. Tämä tarkoittaa sitä, että tekijäryhmää $PSL_n(\mathbb{R})$ voidaan ajatella ryhmänä $SL_n(\mathbb{R})$, missä alkiot g ja $-g$ on samastettu.

Jos n on pariton, on $SL_n(\mathbb{R})$ keskus triviaali kuten yllä todettiin. Tästä seuraa, että ryhmä $PSL_n(\mathbb{R})$ on isomorfinen ryhmän $SL_n(\mathbb{R})$ kanssa.

Jos kerroinkunnaksi vaihdetaan $\mathbb{C}$, tulee erityisen lineaarisen ryhmän keskukseen lisää alkioita. Kompleksilukujen kunnassa ykkösen n:nnet juuret muodostavat nimittäin n-alkioisen syklisen ryhmän. Ryhmä $Z(SL_n(\mathbb{C}))$ on sen kanssa isomorfinen.

Esimerkki 3.10. Ryhmä $GL_3(7)$ muodostuu 3×3-matriiseista, joiden alkiot ovat kunnassa $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sen keskus $Z_G = Z(GL_3(7))$ on kuusialkioinen ryhmä $\{\alpha I_n \mid \alpha \in \mathbb{F}_7^*\}$.

Tekijäryhmä $PGL_3(7)$ muodostuu sivuluokista gZ_G, missä $g \in GL_3(7)$. Esimerkiksi matriisit

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

kuuluvat samaan sivuluokkaan, sillä $a \cdot (3I_3) = b$. Siten sivuluokat aZ_G ja bZ_G ovat samat, ja ne ovat siis sama $PGL_3(7)$:n alkio.

Ryhmän $SL_3(7)$ keskukseen kuuluvat ryhmän Z_G alkioista αI_3 ne, joille pätee $\alpha^3 = 1$, eli alkiot I_3, $2I_3$ ja $4I_3$.

3.3 Projektiiviset avaruudet

Yleinen lineaarinen ryhmä säilyttää origon kautta kulkevat suorat. Toisin sanoen, jos kaksi vektoria on samalla origon kautta kulkevalla suoralla, niin myös niiden kuvat ovat samalla origon kautta kulkevalla suoralla. Näitä suoria kutsutaan projektiivisiksi pisteiksi ja niiden joukkoa projektiiviseksi avaruudeksi.

Määritelmä 3.11. Vektoriavaruudesta V johdettu *projektiivinen avaruus* on joukko $\mathbb{P}(V) = \{\langle v \rangle \mid v \in V \setminus \{0\}\}$, missä $\langle v \rangle = \{\alpha v \mid \alpha \in K\}$.

Ryhmän $GL(V)$ alkiot voidaan nyt tulkita projektiivisen avaruuden kuvauksiksi seuraavalla tavalla: jos $g \in GL(V)$ ja $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$, niin

$$g(\langle v \rangle) = \langle g(v) \rangle.$$

Eri alkiot saattavat kuvata projektiivisen avaruuden alkioita samalla tavalla. Esimerkiksi skalaarimatriisit pitävät projektiivisen avaruuden pisteet paikoillaan eli käyttäytyvät täsmälleen samalla tavalla kuin neutraalialkio I_n.

Tästä seuraa, että myös ryhmän $PGL(V)$:n alkiot voidaan tulkita projektiivisen avaruuden kuvauksiksi. Se tehdään seuraavasti: Olkoot $\langle v\rangle \in \mathbb{P}(V)$ ja $\bar{g} \in PGL(V)$, jolloin $\bar{g} = gZ(GL(V))$ jollakin $g \in GL(V)$. Määritellään

$$\bar{g}(\langle v\rangle) = \langle g(v)\rangle.$$

Ryhmän $PGL(V)$ alkio kuvaa siis projektiivisen avaruuden alkioita samalla tavalla kuin kyseisen alkion edustaja ryhmässä $GL(V)$. (Lukijan tehtäväksi jää osoittaa, että tämä kuvaus on hyvin määritelty. Se seuraa siitä, että skalaarimatriisit, jotka on ryhmässä $PGL(V)$ samastettu neutraalialkion kanssa, kuvaavat projektiivisen avaruuden pisteitä kuten neutraalialkio.)

Seuraava lause osoittaa, että skalaarimatriisit ovat itse asiassa ainoita alkioita, jotka pitävät kaikki projektiivisen avaruuden alkiot paikoillaan.

Lause 3.12. *Olkoon $g \in GL(V) = GL_n(K)$, ja oletetaan, että $g(\langle v\rangle) = \langle v\rangle$ kaikilla $v \in V$. Tällöin $g = \lambda I_n$ jollakin $\lambda \in K^*$.*

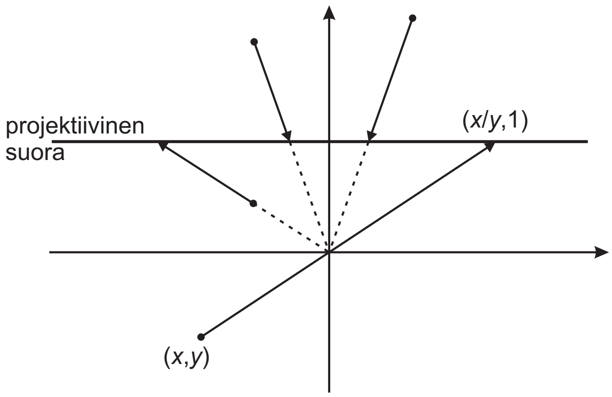
Todistus. Olkoon $v \in V$. Jos V on yksiulotteinen, on väite selvästikin totta. Voidaan siis olettaa, että on olemassa $w \in V$, joka on lineaarisesti riippumaton vektorista v. Koska $g(\langle v\rangle) = \langle v\rangle$ ja $g(\langle w\rangle) = \langle w\rangle$, on olemassa sellaiset skalaarit α ja β, että $g(v) = \alpha v$ ja $g(w) = \beta w$. Lisäksi $g(\langle v + w\rangle) = \langle v + w\rangle$, joten $g(v + w) = \gamma(v + w) = \gamma v + \gamma w$ jollakin $\gamma \in K$. Toisaalta g:n lineaarisuuden nojalla $g(v + w) = g(v) + g(w) = \alpha v + \beta w$. Vektorien v ja w lineaarisesta riippumattomuudesta seuraa, että $\alpha = \gamma = \beta$. Siten $g(v) = \gamma v$ kaikilla $v \in V$, eli g on skalaarimatriisi. $\square$

Ryhmän $GL(V)$ keskus muodostuu siis täsmälleen niistä alkioista, jotka pitävät projektiivisen avaruuden pisteet paikoillaan. Nyt voimmekin tarkastella projektiivista lineaarista ryhmää, jossa kaikki keskuksen alkiot on samastettu. Samastuksesta seuraa, että ryhmässä $PGL(V)$ jokainen alkio on erilainen projektiivisen avaruuden kuvaus. (Tämä jätetään jälleen lukijan osoitettavaksi.)

Siirtymällä tarkastelemaan ryhmää $PGL(V)$ olemme siis päässeet eroon siitä ongelmasta, että ryhmän $GL(V)$ eri alkiot saattavat kuvata projektiivisen avaruuden pisteitä samalla tavalla. Samalla tavoin voidaan ryhmästä $SL(V)$ siirtyä erityiseen projektiiviseen ryhmään $PSL(V)$.

3.3.1 Projektiivinen suora

Aloitetaan projektiivisten avaruuksien tarkastelu kaksiulotteisista avaruuksista johdetuista projektiivisista avaruuksista $\mathbb{P}(K^2)$. Niitä kutsutaan *projektiivisiksi suoriksi*. Projektiivisen suoran alkiot ovat muotoa $\langle(x, y)\rangle$. Jos $y \neq 0$, niin projektiivinen piste $\langle(x, y)\rangle$ on sama piste kuin $\langle(x/y, 1)\rangle$. Siten projektiivinen suora $\mathbb{P}(K^2)$ voidaan samastaa joukon $K \cup \{\infty\}$ kanssa, missä piste $\langle(x, 1)\rangle$ vastaa kunnan alkiota x ja piste $\langle(1, 0)\rangle$ ääretöntä.



Kuva 1: Projektiivinen suora koostuu projektiivisista pisteistä $\langle(x/y,1)\rangle$

Kuten edellä todettiin, ryhmä $PGL_2(K)$ voidaan tulkita projektiivisen suoran $\mathbb{P}(K^2)$ kuvauksiksi. Matriisin

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

sivuluokka vastaa tällöin projektiivisen suoran kuvausta

$$\langle(x,y)\rangle \mapsto \langle(ax+by, cx+dy)\rangle.$$

Joukossa $K \cup \{\infty\}$ tämä kuvaus taas on muotoa

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

ja sitä kutsutaan möbiuskuvaukseksi. Jos $K = \mathbb{C}$, ovat nämä kuvaukset tuttuja funktioteoriasta.

Määritelmä 3.13. *Möbiuskuvaus* on rationaalifunktio $f : K \cup \{\infty\} \to K \cup \{\infty\}$, joka on muotoa

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $ad - bc \neq 0$. Funktion f arvot pisteissä ∞ ja $-\frac{d}{c}$ määritellään seuraavasti: $f(\infty) = \frac{a}{c}$ ja $f(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Möbiuskuvausten joukko muodostaa ryhmän, joka on isomorfinen ryhmän $PGL_2(K)$ kanssa. Möbiuskuvaukset, joilla $ad - bc$ on neliö, muodostavat ryhmän, joka on isomorfinen $PSL_2(K)$:n kanssa. Näiden väitteiden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

3.3.2 Projektiivinen taso

Projektiivisia avaruuksia, jotka on johdettu kolmiulotteisesta vektoriavaruudesta, kutsutaan *projektiivisiksi tasoiksi.*

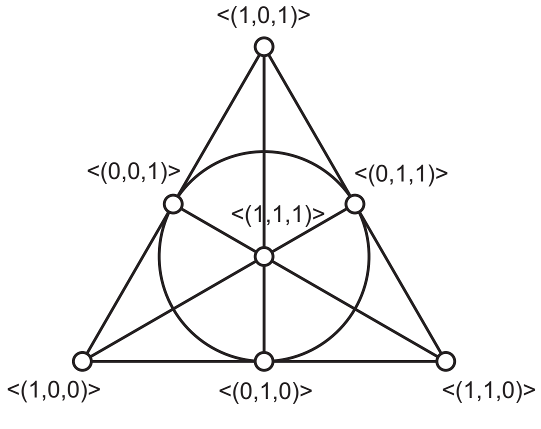
Tutkitaan seuraavaksi projektiivista tasoa $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$, missä $\mathbb{F}_2$ on kaksialkioinen kunta $\{0, 1\}$. Avaruudessa $\mathbb{F}_2^3$ on $2^3 = 8$ vektoria, jotka ovat

$$(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1).$$

Projektiivisen taso koostuu siis seitsemästä alkioista:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3) = \big\{ &\langle(1,0,0)\rangle,\ \langle(0,1,0)\rangle,\ \langle(0,0,1)\rangle,\\ &\langle(0,1,1)\rangle,\ \langle(1,0,1)\rangle,\ \langle(1,1,0)\rangle,\ \langle(1,1,1)\rangle \big\}.\end{aligned}$$

Kahden vektorin virittämää aliavaruutta kutsutaan projektiivisen tason suoraksi. Projektiivisen tason pisteen $\langle v\rangle$ sanotaan olevan projektiivisella suoralla $\langle w, u\rangle$, jos suora $\langle v\rangle$ on tasossa $\langle w, u\rangle$. Projektiivisen tason $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$ tapauksessa suoria on seitsemän, ja ne on piirretty allaolevaan kuvaan. Muodostuva diagrammi on kuuluisa Fanon taso.



Kuva 2: Fanon taso eli projektiivinen taso $\mathbb{P}(\mathbb{F}_2^3)$

3.4 Ryhmien kertalukuja

Äärellisten lineaaristen ryhmien kertalukujen laskeminen on melko yksinkertaista.

Lause 3.14. *Ryhmän $GL_n(q)$ kertaluku on*

$$|GL_n(q)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\cdots(q^n - q^{n-1}).$$

Todistus. Ryhmän $GL_n(q)$ alkiot vastaavat vektoriavaruuden $\mathbb{F}_q^n$ kannanvaihtoja. Ryhmän kertaluvun selvittämiseen riittää siis kaikkien mahdollisten kannanvaihtojen lukumäärän laskeminen.

Olkoon $(v_1, \ldots, v_n)$ jokin avaruuden $\mathbb{F}_q^n$ kanta. Vektori v_1 voidaan kannanvaihdossa kuvata mille tahansa nollasta poikkeavalle vektorille, joten eri vaihtoehtoja on $q^n - 1$. (Vektoriavaruudessa $\mathbb{F}_q^n$ on q^n vektoria.)

Vektori v_2 taas voidaan kuvata mille tahansa vektorille, joka ei ole vektorin v_1 virittämässä aliavaruudessa. Vaihtoehtoja on siis $q^n - q$. Vektori v_3 puolestaan voidaan kuvata mille tahansa vektorille, joka ei ole vektorien v_1 ja v_2 virittämässä aliavaruudessa. Vaihtoehtoja on siis $q^n - q^2$. Näin jatkaen voidaan todeta, että erilaisia kannanvaihtoja on $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1})$ kappaletta. $\square$

Muiden ryhmien kertalukujen lasku on nyt vaivatonta.

Lause 3.15. *Ryhmän $SL_n(q)$ kertaluku on $|GL_n(q)|/(q-1)$.*

Todistus. Lauseen 3.4 nojalla

$$|SL_n(q)| = \frac{|GL_n(q)|}{|K^*|} = \frac{|GL_n(q)|}{q-1}.$$

$\square$

Lause 3.16. *Ryhmän $PGL_n(q)$ kertaluku on $|GL_n(q)|/(q-1)$.*

Todistus. Koska $PGL_n(q)$ on tekijäryhmä $GL_n(q)/Z(GL_n(q))$, niin sen kertaluku on $|GL_n(q)|/|Z(GL_n(q))|$. Aikaisemmin on osoitettu, että $Z(GL_n(q))$ on isomorfinen ryhmän F_q^* kanssa. Koska $\mathbb{F}_q^*$:n kertaluku on $q-1$, on väite todistettu. $\square$

Lause 3.17. *Ryhmän $PSL_n(q)$ kertaluku on $|SL_n(q)|/\operatorname{syt}(q-1, n)$.*

Todistus. Väitteen todistamiseksi riittää laskea ryhmän $Z(SL_n(q))$ kertaluku. Tämän laskemiseksi taas riittää laskea keskuksen kanssa isomorfisen ryhmän $H = \{\alpha \in \mathbb{F}_q^* \mid \alpha^n = 1\}$ alkioiden lukumäärä. Lauseen 2.3 perusteella $\mathbb{F}_q^*$ on syklinen ryhmä, jonka kertaluku on $q-1$. Siten lauseesta 2.3 seuraa, että aliryhmän H kertaluku on $\operatorname{syt}(q-1, n)$. $\square$