4 Bilineaariset muodot

4.1 Johdanto: sisätulo euklidisessa avaruudessa

Vektoriavaruuden rakenne mahdollistaa monien tavallisten geometristen käsitteiden määrittelemisen. Pisteet, suorat, tasot ym. voidaan määritellä luonnollisesti aliavaruuksien avulla. Kuitenkin esimerkiksi kulman käsitteen määrittelemiseksi tarvitaan jotain lisää.

Tavallisessa euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ vektorien väliset kulmat voidaan määritellä tutun *pistetulon* avulla:

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Usein ollaan erityisesti kiinnostuneita siitä, mitkä vektorit ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan. Tämä tapahtuu euklidisessa avaruudessa täsmälleen silloin, kun pistetulon arvo on 0. Pistetulon määritelmää ei voi kuitenkaan käyttää sellaisenaan esimerkiksi ääretönulotteisissa avaruuksissa. Tällöin turvaudutaan yleisempään *sisätulon* käsitteeseen. Reaalikertoimisen vektoriavaruuden sisätulo on kahden vektorin pareilta kerroinkunnalle (tässä $\mathbb{R}$) määriteltävä kuvaus, joka toteuttaa seuraavat ehdot kaikilla vektoreilla x, y, v ja skalaareilla λ:

$$\langle x + y, v\rangle = \langle x, v\rangle + \langle y, v\rangle \tag{ST1}$$
$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \tag{ST2}$$
$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \tag{ST3}$$
$$\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \text{ja} \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0. \tag{ST4}$$

Ehtoja (ST1) ja (ST2) kutsutaan lineaarisuusehdoiksi, ehtoa (ST3) symmetrisyydeksi ja ehtoa (ST4) positiiviseksi definiittisyydeksi. Tavallinen pistetulo täyttää kaikki nämä ehdot. Jos sisätulo on olemassa, voidaan määritellä myös vektorin pituus ja vektorien välinen kulma:

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \qquad \cos\measuredangle(v, w) = \frac{\langle v, w\rangle}{|v||w|}.$$

Yleisessä tapauksessa vektoriavaruuteen ei voida määritellä minkäänlaista sisätuloa, koska esimerkiksi ehdon (ST4) tarkistamiseksi kerroinkunnassa on oltava järjestysrelaatio $\geq$ (tai vähintään on kyettävä sanomaan mitkä sisätulon arvot ovat positiivisia). Sisätulon käsitettä voidaan kuitenkin edelleen yleistää.

4.2 Määritelmä ja matriisiesitys

Oletetaan jatkossa, että käytetyt vektoriavaruudet ovat äärellisulotteisia.

Määritelmä 4.1. Olkoon V vektoriavaruus, kerroinkuntana K. Kuvausta $B : V \times V \to K$ kutsutaan *bilineaariseksi muodoksi*, jos se täyttää seuraavat ehdot kaikilla vektoreilla x, y, z ja skalaareilla λ:

$$B(x+y,z) = B(x,z) + B(y,z) \tag{B1}$$
$$B(\lambda x,y) = \lambda B(x,y) \tag{B2}$$
$$B(x,y+z) = B(x,y) + B(x,z) \tag{B3}$$
$$B(x,\lambda y) = \lambda B(x,y). \tag{B4}$$

Jos avaruudelle kiinnitetään jokin kanta $(v_1, \ldots, v_n)$, bilineaarinen muoto B voidaan ilmaista matriisina $\hat{B} = [b_{ij}]$, missä $b_{ij} = B(v_i, v_j)$ kaikilla i, j. Tällöin kaikilla vektoreilla x, y pätee

$$B(x,y) = x^\top \hat{B} y.$$

Jos valitusta kannasta ei ole epäselvyyttä, voidaan muoto B ja sitä vastaava matriisi $\hat{B}$ yleensä samastaa.

4.3 Ekvivalenssi

Määritelmä 4.2. Bilineaaristen muotojen B_1 ja B_2 sanotaan olevan *ekvivalentteja*, jos on olemassa jokin vektoriavaruuden lineaarinen automorfismi L, jolle pätee $B_1(x,y) = B_2(Lx, Ly)$.

Esimerkki 4.3. Tarkastellaan $\mathbb{R}^2$ bilineaarista muotoa

$$B(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2,$$

missä $x = (x_1, x_2)$ ja $x = (y_1, y_2)$. Suorittamalla vektoriavaruudelle lineaarinen muunnos $x_1' = x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 - x_2$, muoto voidaan kirjoittaa yksinkertaisemmin:

$$\begin{aligned} B(x',y') &= (x_1+x_2)(y_1+y_2) + 2(x_1+x_2)(y_1-y_2) \\ &\quad + 2(x_1-x_2)(y_1+y_2) + (x_1-x_2)(y_1-y_2) \\ &= 6x_1y_1 - 2x_2y_2. \end{aligned}$$

Muunnettu muoto $B'(x,y) = 6x_1y_1 - 2x_2y_2$ on ekvivalentti alkuperäisen kanssa.

Muunnetun muodon matriisiesitys saadaan seuraavasti:

$$x^\top \hat{B}' y = B'(x,y) = B(Lx, Ly) = (Lx)^\top \hat{B}(Ly) = x^\top (L^\top \hat{B} L) y.$$

Koska ylläolevan täytyy päteä kaikilla kantavektoreilla, nähdään, että muunnettua muotoa vastaa matriisi $\hat{B}' = L^\top \hat{B} L$. Tällaista matriisia sanotaan matriisin $\hat{B}$ *kongruentiksi*.

Matriisien tapauksessa ekvivalenssi vastaa *kannanvaihtoa*.

Lause 4.4. *Bilineaariset muodot B_1 ja B_2 avaruudessa V ovat ekvivalentit, jos ja vain jos on olemassa kannat $S = (v_1, \ldots, v_n)$ ja $T = (w_1, \ldots, w_n)$, joiden suhteen matriisiesitykset $\hat{B}_1$ ja $\hat{B}_2$ ovat samat.*

Todistus. Oletetaan ensin, että L on ekvivalenssi muotojen B_1 ja B_2 välillä. Valitaan kanta S mielivaltaisesti ja asetetaan $w_i = Lv_i$ kaikilla i. Nyt $(w_1, \ldots, w_n)$ on kanta (koska L on kääntyvä), ja kaikilla i, j pätee

$$\hat{B}_1(i,j) = B_1(v_i, v_j) = B_2(Lv_i, Lv_j) = B_2(w_i, w_j) = \hat{B}_2(i,j).$$

Täten $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$.

Oletetaan sitten, että matriisiesitykset $\hat{B}_1$ ja $\hat{B}_2$ kantojen S ja T suhteen ovat samat. Määritellään lineaarinen isomorfismi L kaavalla $Lv_i = w_i$. Olkoot $x = \sum_i a_i v_i$ ja $y = \sum_j b_j v_j$ kaksi mielivaltaista vektoria. Tällöin

$$\begin{aligned} B_1(x,y) &= B_1\left(\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j\right) = \sum_{i,j} a_i b_j B_1(v_i, v_j) = \sum_{i,j} a_i b_j \hat{B}_1(i,j) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \hat{B}_2(i,j) = \sum_{i,j} a_i b_j B_2(w_i, w_j) = \sum_{i,j} a_i b_j B_2(Lv_i, Lv_j) \\ &= B_2\left(\sum_i a_i Lv_i, \sum_j b_j Lv_j\right) = B_2(Lx, Ly). \end{aligned}$$

□

4.4 Kohtisuoruus

Bilineaarista muotoa B voidaan käyttää kohtisuoruuden eli *ortogonaalisuuden* määrittelemiseen samalla tavoin kuin sisätuloakin, kunhan B on *refleksiivinen*. Tämä tarkoittaa sitä, että

$$B(v,w) = 0 \iff B(w,v) = 0. \tag{R1}$$

Tällöin voidaan määritellä kohtisuoruus.

Määritelmä 4.5. Oletetaan, että B on refleksiivinen bilineaarinen muoto. Vektorien v ja w sanotaan olevan kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos $B(v,w) = 0$. Tällöin merkitään $v \perp w$.

Määritelmä 4.6. Olkoon W vektoriavaruuden V aliavaruus. Aliavaruuden W *kohtisuora komplementti* refleksiivisen muodon B suhteen on

$$W^{\perp_B} = \{v \in V \mid B(v,w) = 0 \text{ kaikilla } w \in W\}.$$

Kohtisuora komplementti on myös avaruuden W aliavaruus. Jos käytettävä muoto on asiayhteydestä selvä, kohtisuoraa komplementtia merkitään $W^{\perp}$.

Ne vektorit, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia vektoreita vastaan, muodostavat oman aliavaruutensa.

Määritelmä 4.7. Vektoriavaruuden V *radikaali* refleksiivisen muodon B suhteen on joukko

$$\mathrm{rad}_B(V) = \{v \in V \mid B(v, w) = 0 \text{ kaikilla } w \in V\}.$$

Jos asiayhteydestä on selvä, mihin muotoon viitataan, voidaan radikaalia merkitä myös $\mathrm{rad}(V)$.

Määritelmä 4.8. Jos vektoriavaruuden V radikaali muodon B suhteen on epätriviaali ($\neq \{0\}$), niin sanotaan että muoto on *surkastunut*.

Minkä tahansa aliavaruuden kohtisuora komplementti sisältää koko avaruuden radikaalin. Toisaalta, jos radikaali on triviaali, niin vastaava muoto ei ole surkastunut.

4.5 Symmetriset ja alternoivat muodot

Määritellään ensin muutamia bilineaarisen muodon tyyppejä.

Määritelmä 4.9. Bilineaarista muotoa B kutsutaan

(1) *symmetriseksi*, jos $B(v, w) = B(w, v)$ kaikilla vektoreilla v, w

(2a) *alternoivaksi*, jos $B(v, v) = 0$ kaikilla vektoreilla v

(2b) *antisymmetriseksi*, jos $B(v, w) = -B(w, v)$ kaikilla vektoreilla v, w.

Alternoiva muoto on aina myös antisymmetrinen, mutta antisymmetrisyydestä seuraa alternoivuus vain, jos kerroinkunnan karakteristika ei ole 2. Symmetrinen muoto voi olla alternoiva vain, jos $B(v, w) = 0$ kaikilla vektoreilla v, w. Sekä symmetriset että alternoivat muodot ovat refleksiivisiä. Lisäksi osoittautuu, että muunlaisia refleksiivisiä muotoja ei ole olemassa.

Lause 4.10. *Jokainen refleksiivinen bilineaarinen muoto on joko symmetrinen tai alternoiva.*

Lauseen todistus ei ole vaikea mutta sisältää paljon näpertelyä lausekkeiden kanssa. Halukkaat voivat tarkistaa todistuksen esimerkiksi Larry C. Groven kirjasta Classical Groups and Geometric Algebra (propositio 2.7).

Symmetriset bilineaariset muodot eivät poikkea kovin paljon sisätuloista. Ainoastaan ehto (S4) eli positiivinen definiittisyys jää mahdollisesti toteutumatta. Tämä estää vektorien pituuden sekä mielivaltaisten kulmien määrittelemisen tavalliseen tapaan neliöjuuren avulla. Kuitenkin symmetrisillä muodoilla kohtisuoruus käyttäytyy yleensä odotetulla tavalla. Alternoivilla muodoilla sen sijaan kohtisuoruus on jonkin verran eksoottisempi ominaisuus: määritelmän mukaan jokainen vektori on kohtisuorassa itseään vastaan.

4.6 Isometrioista

Olkoon B jokin bilineaarinen muoto vektoriavaruudessa V. Sellaisia kääntyviä lineaarikuvauksia $L : V \to V$, jotka *säilyttävät* muodon B eli joille pätee

$$B(Lx, Ly) = B(x, y) \quad \text{kaikilla } x, y \in V,$$

kutsutaan *B-isometrioiksi*. Nimi tulee siitä, että kuvaus ei muuta sitä geometriaa, jonka B määrittää avaruuteen V. Tämä geometria saattaa esimerkiksi määritellä vektorien pituudet, tai mitkä vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Jonkin muodon suhteen määritellyt isometriat muodostavat aina ryhmän $GL(V)$ aliryhmän. Helposti nimittäin nähdään, että isometrioiden tulot ja käänteiskuvaukset (isometriat ovat määritelmän mukaan kääntyviä) ovat edelleen isometrioita:

$$\begin{aligned} &B\big(L_2(L_1x), L_2(L_1y)\big) = B(L_1x, L_1y) = B(x, y) \quad \text{ja} \\ &B(L^{-1}x, L^{-1}y) = B\big(L(L^{-1}x), L(L^{-1}y)\big) = B(x, y). \end{aligned}$$

Seuraavissa luvuissa käsiteltävät klassiset ryhmät ovat johonkin muotoon liittyvien isometrioiden ryhmiä.

Oletetaan, että $\hat{B}$ on muodon B matriisiesitys ja että $\hat{L}$ on kuvausta L vastaava matriisi. Nyt L on isometria jos ja vain jos

$$v^\top \hat{B} w = (\hat{L}v)^\top \hat{B}(\hat{L}w) = v^\top(\hat{L}^\top \hat{B}\hat{L})w \qquad \text{kaikilla } v, w.$$

Näin saadaan helposti tarkistettava ehto isometrialle: $\hat{B} = \hat{L}^\top \hat{B}\hat{L}$.

Isometrioita tarkasteltaessa ekvivalentit muodot pyritään yleensä samastamaan. On nimittäin niin, että ekvivalentteja muotoja vastaavat isometriaryhmät ovat *isomorfisia*. Tarkemmin sanottuna, jos $B'(v, w) = B(Tv, Tw)$ jollakin lineaarikuvauksella T ja L on jokin B-isometria, niin

$$B'(T^{-1}LTv, T^{-1}LTw) = B(LTv, LTw) = B(Tv, Tw) = B'(v, w).$$

Jokaista B-isometriaa L vastaa siis B'-isometria $T^{-1}LT$. Isometriaryhmien välinen kuvaus $L \mapsto T^{-1}LT$, eli konjugointi alkiolla $T \in GL(V)$, on isomorfismi.

Lause 4.11. *Ekvivalentteja muotoja vastaavat isometriaryhmät ovat toistensa konjugaatteja kääntyvien lineaarikuvausten ryhmässä $GL(V)$.*