5 Ortogonaaliset ryhmät

Tässä luvussa tarkastellaan symmetristen bilineaaristen muotojen isometriaryhmiä. Yksinkertaistuksen vuoksi tapaus, jossa kerroinkunnan karakteristika on 2, käsitellään lopuksi erillisessä kappaleessa, ja siihen asti oletetaan, että kyseinen karakteristika ei ole 2.

5.1 Määritelmä ja perusominaisuudet

Määritelmä 5.1. Oletetaan, että B on surkastumaton symmetrinen bilineaarinen muoto vektoriavaruudessa V. Jos lineaarikuvaus g säilyttää muodon B, niin sanotaan että g on *ortogonaalinen* (muodon B suhteen). Ortogonaalisten kuvausten ryhmää kutsutaan *ortogonaaliseksi ryhmäksi* ja merkitään $O^{(B)}(V)$.

Ortogonaalisen ryhmän rakenne riippuu muodosta B, mutta jos muoto on asiayhteydestä selvä, voidaan ryhmää merkitä $O(V)$. Toisaalta äärellisulotteisen vektoriavaruuden määrittävät isomorfiaa vaille sen kerroinkunta K ja dimensio n, joten ortogonaalista ryhmää voidaan merkitä myös $O_n^{(B)}(K)$ tai $O_n(K)$. Lisäksi erilaisissa erikoistapauksissa tavataan vielä lukuisia muita merkintätapoja.

Ortogonaaliset kuvaukset jakautuvat kahteen tyyppiin determinantin perusteella. Nimittäin, jos $g \in O^{(B)}(V)$, niin $B = g^\top B g$, ja

$$\det(B) = \det(g^\top B g) = \det(g^\top)\det(B)\det(g) = \det(g)^2\det(B),$$

sillä $\det(A^\top) = \det(A)$ kaikilla matriiseilla A. Jakamalla yllä olevan yhtälön molemmat puolet luvulla $\det(B)$ saadaan $\det(g)^2 = 1$, josta puolestaan $\det(g) = \pm 1$. Ortogonaalisia kuvauksia, joiden determinantti on 1, kutsutaan *kierroiksi*. Ne muodostavat ortogonaalisen ryhmän normaalin aliryhmän, mikä nähdään esimerkiksi siitä, että determinanttikuvaus on homomorfismi kerroinkunnan multiplikatiiviselle ryhmälle (tai sitten suoraan tarkistamalla normaalin aliryhmän ehdot). Tätä aliryhmää nimitetään *erityiseksi ortogonaaliseksi ryhmäksi* ja merkitään $SO^{(B)}(V)$. Erityisen ortogonaalisen ryhmän indeksi $[O(V) : SO(V)]$ on korkeintaan 2, mistä saadaan seuraava lause.

Lause 5.2. *Oletetaan, että $O(V) \neq SO(V)$, ja kiinnitetään jokin $p \in O(V) \setminus SO(V)$. Joukko $SO(V) \cup \{p\}$ virittää ryhmän $O(V)$, ja jokainen $g \in O(V)$ on joko muotoa r tai $r \cdot p$, missä $r \in SO(V)$.*

Todistus. Jos $g \in SO(V)$, niin tulos on selvä. Voidaan siis olettaa, että $g \in O(V) \setminus SO(V)$. Koska aliryhmällä $SO(V)$ on vain kaksi sivuluokkaa: $SO(V)$ ja $SO(V) \cdot p$, niin g kuuluu sivuluokkaan $SO(V) \cdot p$. Näin ollen $g = r \cdot p$ jollain kierrolla r. □

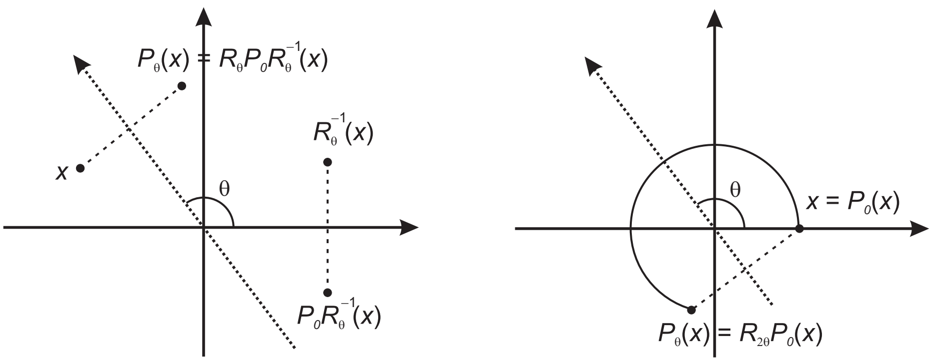
Itse asiassa myöhemmin nähdään, että $O(V) \neq SO(V)$. Siis aliryhmän $SO(V)$ indeksi ryhmässä $O(V)$ on aina 2, ja edellisen lauseen oletus oli tarpeeton.

Esimerkki 5.3. Tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}^n$ ja siinä muotona tavallista pistetuloa $x \cdot y$. Lineaarialgebrasta tiedetään, että kunkin vektorin euklidinen pituus saadaan kaavasta $\sqrt{x \cdot x}$ ja kahden vektorin välinen kulma kaavasta $(x \cdot y)/(|x||y|)$. Koska ortogonaaliset kuvaukset säilyttävät pistetulon, ne siis säilyttävät vektorien pituudet ja niiden väliset kulmat. Geometrisessä mielessä tällaiset kuvaukset ovat *kiertoja* tai *peilauksia* tai niiden yhdistelmiä.

Tasossa $\mathbb{R}^2$ kiertoa kulman φ verran origon ympäri vastaa matriisi

$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Tällaisen matriisin determinantti on $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, joten kierrot kuuluvat ryhmään $SO_2(\mathbb{R})$. Tasossa tämä kiertoryhmä on vaihdannainen, koska $R_\varphi \cdot R_\psi = R_{\varphi+\psi}$.



Kuva 3: Peilauksen kaavan johtaminen kahdella eri tavalla

Tarkastellaan peilauksia origon kautta kulkevan suoran yli. Peilaus x-akselin yli hoituu matriisilla $P_0 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$. Olkoon θ jonkin mielivaltaisen suoran ja positiivisen x-akselin välinen kulma. Peilaus tämän suoran yli saadaan peilauksesta P_0 konjugoimalla sitä sopivalla kierrolla:

$$P_\theta = R_\theta P_0 R_\theta^{-1} = R_\theta P_0 R_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{bmatrix}.$$

Tästä nähdään jo, että kaikkien suoran yli tapahtuvien peilausten determinantti on -1, koska konjugointi ei vaikuta determinanttiin ja $\det P_0 = -1$. Kuitenkin edellä esitetyn lauseen nojalla tiedetään, että P_θ voidaan lausua myös tulona peilauksesta P_0 ja jostain kierrosta R_φ. Tämä kierto saadaan selville, kun huomataan, että $P_\theta(1,0) = (R_\varphi \cdot P_0)(1,0) = R_\varphi(1,0)$ ja toisaalta $P_\theta(1,0) = R_{2\theta}(1,0)$ (ks. kuva 3). Näin ollen

$$P_\theta = R_{2\theta} P_0 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Tuloksista voidaan lukea trigonometristen funktioiden kaksinkertaisen kulman kaavat.

Kuten yleisen lineaarisen ryhmän tapauksessa, voidaan myös ortogonaalisessa ryhmässä samastaa kuvaukset, jotka eroavat toisistaan vain skalaarikertoimella. Näin saadaan *projektiivinen ortogonaalinen ryhmä* $PO^{(B)}(V)$, jonka alkiot toimivat projektiivisessa avaruudessa. Vastaavasti, jos lähtökohtana ovat vain kierrot eli ryhmän $SO^{(B)}(V)$ alkiot, saadaan *erityinen projektiivinen ortogonaalinen ryhmä* $PSO^{(B)}(V)$.

5.2 Ortogonaaliset kannat

Tässä kappaleessa kuvaillaan, miten symmetrinen muoto voidaan aina ilmaista tietyssä normaalimuodossa. Todetaan ensin eräs ortogonaalisia komplementteja koskeva hyödyllinen tulos.

Lemma 5.4. *Oletetaan, että B on refleksiivinen bilineaarinen muoto avaruudessa V, ja että aliavaruudelle W pätee $\mathrm{rad}(W) = \{0\}$. Tällöin jokaisella $v \in V$ on yksikäsitteinen esitys muodossa $v = w + u$, missä $w \in W$ ja $u \in W^\perp$ (eli V on aliavaruuksien W ja $W^\perp$ suora summa).*

Todistus. Olkoon $(v_1, \ldots, v_r)$ aliavaruuden W kanta. Jatketaan sitä vektoreilla $v_{r+1}, \ldots, v_n$ niin, että siitä tulee kanta koko avaruudelle V. Olkoon $\hat{B} = [b_{ij}]$ muodon V matriisi tässä kannassa, ja olkoon $x = \sum_i x_i v_i \in V$ mielivaltainen. Nyt $x \in W^\perp$ jos ja vain jos kaikilla i pätee $B(v_i, x) = 0$ eli

$$\sum_{j=1}^{r} b_{ij} x_j = 0.$$

Siispä x on yhtälöryhmän $B'X = 0$ ratkaisu, missä B' on $r \times n$-matriisi, jonka rivit ovat samat kuin B:n r ensimmäistä riviä. Lineaarialgebrasta tiedetään, että tällöin $\dim W^\perp = \dim \mathrm{Null}(B') = n - \mathrm{rank}(B') \geq n - r$. Näin ollen $V \subset W + W^\perp$, joten jokainen V:n vektori voidaan kirjoittaa summana avaruuksien W ja $W^\perp$ vektoreista.

Toisaalta, jos $v = w + u = w' + u'$, missä $w, w' \in W$ ja $u, u' \in W^\perp$, niin $w - w' = u - u' \in W \cap W^\perp$. Oletuksen mukaan $\mathrm{rad}(W) = W \cap W^\perp = \{0\}$, joten $w = w'$ ja $u = u'$. $\square$

Lause 5.5. *Olkoon B symmetrinen bilineaarinen muoto vektoriavaruudessa V. Tällöin on olemassa kanta $(v_1, \ldots, v_n)$, jonka suhteen B:n matriisiesitys on muotoa*

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & b_r & & & \\ \vdots & & & 0 & & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{bmatrix},$$

missä $b_i \neq 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, r\}$. Lisäksi jono $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ on avaruuden $\mathrm{rad}(V)$ kanta.

Todistus. (Hahmotelma.) Jos $B(v,w) = 0$ kaikilla $v,w \in V$, niin voidaan asettaa $r = 0$. Muussa tapauksessa löytyy jokin $v_1 \in V$, jolle $B(v_1,v_1) \neq 0$ (osoitettu harjoitustehtävässä). Nyt avaruus $W = \langle v_1 \rangle$ ei ole surkastunut, joten $W \cap W^\perp = \{0\}$. Jos $n > 1$, niin $\dim W^\perp > 0$ edellisen lemman nojalla. Tällöin konstruktiota voidaan jatkaa valitsemalla $v_2 \in W^\perp$, jolloin v_1 ja v_2 ovat lineaarisesti riippumattomat. Kuten aiemmin, jos $B(v,w) \neq 0$ joillakin $v,w \in W^\perp$, niin voidaan olettaa, että $B(v_2,v_2) \neq 0$.

Kun konstruktiota on jatkettu r askelta, niin on saatu jono $(v_1,\dots,v_r)$, joka virittää jonkin surkastumattoman aliavaruuden U. Lisäksi $B(v_i,v_i) \neq 0$ kaikilla $i \leq r$, ja $B(v_i,v_j) = 0$ kun $i \neq j$. Jos $r < n$, niin konstruktio on pysähtynyt ennen aikojaan, mikä tapahtuu vain, jos $B(v,w) = 0$ kaikilla $v,w \in U^\perp$. Tällöin jono $(v_1,\dots,v_r)$ voidaan täydentää avaruuden V kannaksi lisäämällä mitkä tahansa lineaarisesti riippumattomat vektorit $v_{r+1},\dots,v_n \in U^\perp$. Koska $U \cap U^\perp = \{0\}$, avaruuden $U^\perp$ dimensio on $n-r$, joten jono $(v_{r+1},\dots,v_n)$ on sen kanta. Edelleen on helppo nähdä, että $U^\perp = \mathrm{rad}(V)$. $\square$

Huomautus 5.6. Edellisen lauseen todistuksen konstruktiota voi sellaisenaan käyttää ortogonaalisen kannan löytämiseksi. Oletetaan, että avaruudella on kanta $(v_1,\dots,v_n)$. Valitaan ensin $u_1 = v_1$. Jos on voitu valita kantavektorit $u_1,\dots,u_k$ siten, että $B(u_i,u_i) \neq 0$ kaikilla $i \leq k$, seuraava kantavektori saadaan kaavasta

$$u_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{B(u_i,v_{k+1})}{B(u_i,u_i)} u_i.$$

Tällöin nimittäin $u_{k+1} \perp u_i$ kaikilla $i \leq k$. Tätä rekursiivista menetelmää kutsutaan *Gram-Schmidtin ortogonalisointimenetelmäksi.* On kuitenkin mahdollista, että jossain vaiheessa $B(u_{k+1},u_{k+1}) = 0$ (voi olla jopa $B(v_1,v_1) = 0$). Tällöin yllä olevaa kaavaa ei voi soveltaa, vaan täytyy esimerkiksi pyrkiä vaihtamaan vektorien järjestystä alkuperäisessä kannassa.

Edellisessä lauseessa valitut kantavektorit voidaan tarpeen vaatiessa *normalisoida* valitsemalla $v_i' = c_i v_i$ jollain skalaarilla c_i, jolloin matriisimuodon diagonaalilla oleva alkio b_i muuttuu alkioksi $c_i^2 b_i$. Näin saadaan seuraavat tärkeät korollaarit.

Korollaari 5.7. *Olkoon B symmetrinen bilineaarinen muoto vektoriavaruudessa K^n. Jos kerroinkunnan K kaikilla alkioilla on neliöjuuri (esim. jos kunta on algebrallisesti suljettu kuten $\mathbb{C}$), niin on olemassa sellainen kanta, jossa B:n matriisiesitys on*

$$\hat{B} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-r} \end{array}\right].$$

Korollaari 5.8. *Euklidisessa avaruudessa* $\mathbb{R}^n$ *jokaiselle symmetriselle bilineaariselle muodolle löytyy kanta, jossa sen matriisimuoto on*

$$\hat{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0_{n-r+s} \end{array}\right].$$

5.3 Peilauksista

Tässä luvussa tarkastellaan lähemmin peilauksia jonkin *hypertason* suhteen. Hypertasoksi kutsutaan n-ulotteisen avaruuden $n-1$-ulotteista aliavaruutta. Peilauksia varten tarvitaan vektoreita, joilla $B(v,v) \neq 0$.

Määritelmä 5.9. Vektoria $u \neq 0$ kutsutaan *isotrooppiseksi*, jos $B(u,u) = 0$.

Jos $u \in V$ ei ole isotrooppinen, niin $u^{\perp}$ on perusesimerkki hypertasosta.

Määritelmä 5.10. Olkoon $u \in V$ jokin epäisotrooppinen vektori. Kuvausta p, jolle pätee $p(u) = -u$ ja $p(w) = w$ kaikilla $u \perp w$, kutsutaan *(ortogonaaliseksi) peilaukseksi vektorin* u *suuntaan* tai, toisin sanoin, *hypertason* $u^{\perp}$ *yli.*

Peilaus vektorin u suuntaan on yksikäsitteinen, koska voidaan valita ortogonaalinen kanta niin, että u on yksi kantavektoreista, jolloin peilaus määräytyy kantavektorien arvoista. Peilaukselle voidaan johtaa seuraava kaava:

$$p_u(v) = v - 2\frac{B(v,u)}{B(u,u)}u.$$

Kaavasta voidaan tarkistaa, että peilaukset ovat ortogonaalisia kuvauksia:

$$\begin{aligned} B(p_u(v), p_u(w)) &= B\left(v - 2\frac{B(v,u)}{B(u,u)}u,\ w - 2\frac{B(w,u)}{B(u,u)}u\right) \\ &= B(v,w) - 4\frac{B(v,u)B(w,u)}{B(u,u)} + 4\frac{B(v,u)B(w,u)B(u,u)}{B(u,u)^2} \\ &= B(v,w). \end{aligned}$$

Esimerkki 5.11. Tarkastellaan tasoa $\mathbb{R}^2$, jossa bilineaarisena muotona on

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tällaista avaruutta kutsutaan *hyperboliseksi tasoksi.* Vektorin $x = (x_1, x_2)$ "pituus" on tässä avaruudessa

$$B(x,x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - x_2^2.$$

Jos $x_1 = \pm x_2$, niin $B(x,x) = 0$, ja x on isotrooppinen. Tällaisen vektorin suhteen ei peilauksia voi tehdä. Sen sijaan esimerkiksi vektori $u = (1,2)$

ei ole isotrooppinen: $B(u,u) = -3$. Ratkaistaan u:ta vastaan kohtisuoran hypertason $u^\perp$ yhtälö:

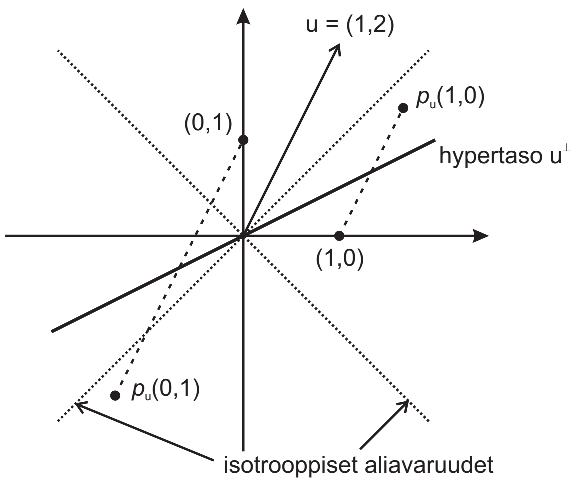
$$B(u,x) = 0 \iff \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = x_1 - 2x_2 = 0.$$

Hypertaso on siis suora, jonka yhtälö on $x_2 = \frac{1}{2}x_1$ (ks. kuva 4). Vektorin u suhteen tehtävän peilauksen kaava saadaan yllä esitetystä lausekkeesta:

$$\begin{aligned} p_u(x) &= x - 2\frac{B(x,u)}{B(u,u)}u = x - 2\cdot\frac{x_1 - 2x_2}{-3}u \\ &= \frac{1}{3}(5x_1 - 4x_2,\, 4x_1 - 5x_2). \end{aligned}$$

Peilauksen matriisi on

$$\hat{p}_u = \begin{bmatrix}5/3 & -4/3\\ 4/3 & -5/3\end{bmatrix}.$$



Kuva 4: Peilaus hyperbolisessa tasossa

Peilauksen p_u determinantti on aina -1. Tämä nähdään esimerkiksi valitsemalla ortogonaalinen kanta $(u, v_2, \ldots, v_n)$. Nyt $p_u(u) = -u$ ja $p(v_i) = 1$ kaikilla $i \in \{2, \ldots, n\}$, joten peilauksen matriisi näyttää seuraavalta:

$$p_u = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & I_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin determinantti on selvästi -1. Nyt voidaan vihdoin todistaa, että $O(V) \setminus SO(V)$ on epätyhjä.

Lause 5.12. *Olkoon B surkastumaton symmetrinen bilineaarinen muoto avaruudessa V. Tällöin löytyy jokin $g \in O^{(B)}(V) \setminus SO^{(B)}(V)$, mistä seuraa $[O^{(B)}(V) : SO^{(B)}(V)] = 2$.*

Todistus. Koska symmetrinen muoto B ei ole surkastunut, on olemassa jokin epäisotrooppinen vektori $u \in V$. Olkoon p_u vastaava ortogonaalinen peilaus. Koska kaikkien peilausten determinantti on -1, niin $u \notin SO^{(B)}(V)$. □

Peilausten merkitys korostuu siinä, että ne *virittävät* ortogonaalisen ryhmän. Tämä tärkeä seikka mainitaan seuraavassa lauseessa, jonka monivaiheinen todistus joudutaan sivuuttamaan.

Lause 5.13. *(Cartan-Dieudonné) Olkoon B surkastumaton bilineaarinen muoto n-ulotteisessa avaruudessa V. Jos $g \in O^{(B)}(V)$, niin g on tulo korkeintaan n kappaleesta peilauksia.*

Yllä olevasta lauseesta saadaan helppona seurauksena muun muassa tuttu kolmiulotteisia kiertoja koskeva lause, joka euklidisen avaruuden tapauksessa tunnetaan nimellä Eulerin lause. Merkitään tässä yhteydessä kuvauksen g *kiintopistealiavaruutta* $\mathrm{Fix}(g) = \{v \in V \mid g(v) = v\}$.

Korollaari 5.14. *Jos* $\dim V = 3$ *ja* $r \in SO(V)$, $r \neq \mathrm{id}$, *niin kiintopisteavaruuden dimensio on* $\dim \mathrm{Fix}(r) = 1$. *Toisin sanoen, g:tä vastaa jokin yksiulotteinen "kiertoakseli".*

Todistus. Kuvaus on r on tulo korkeintaan kolmesta peilauksesta. Koska peilausten determinantti on -1 ja $r \in SO(V)$, niin peilauksia on täsmälleen kaksi. Voidaan siis merkitä $r = p_1 p_2$, missä p_1 ja p_2 ovat peilauksia, jotka kiinnittävät 2-ulotteiset hypertasot W_1 ja W_2. Nyt $W_1 \cap W_2 \subset \mathrm{Fix}(r)$.

Koska $W_1 + W_2 \subset V$ ja

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2),$$

nähdään, että $\dim(W_1 \cap W_2) \geq 1$. Siispä myös $\dim \mathrm{Fix}(r) \geq 1$. Toisaalta, jos avaruuden $\mathrm{Fix}(r)$ dimensio olisi 2 tai 3, niin r kiinnittäisi jonkin hypertason H, ja jokaisella $v \in H^\perp$ pätisi $r(v) \in H^\perp$ (koska r on ortogonaalinen) eli $r(v) = \lambda v$ jollain skalaarilla λ. Sopivassa kannassa olisi siis

$$r = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \neq 0.$$

Tämä on mahdotonta, koska $\det(r) = 1$ ja $r \neq I$. Siispä täytyy päteä $\dim \mathrm{Fix}(r) = \dim(W_1 \cap W_2) = 1$. □

Peilausten avulla voidaan määritellä myös eräs kiinnostava erityisen ortogonaalisen ryhmän aliryhmä. Seuraavassa määritelmässä $SO(V)$ on erityinen ortogonaalinen ryhmä avaruudessa, jonka kerroinkunta on K.

Määritelmä 5.15. Jokainen $g \in SO^{(B)}(V)$ voidaan kirjoittaa tulona $g = p_1 \cdots p_r$, missä kukin p_i on peilaus vektorin v_i suuntaan. Nyt sanotaan, että kuvaus g kuuluu *omegaryhmään* $\Omega^{(B)}(V)$, jos ja vain jos tulo $\prod_i B(v_i, v_i)$ on neliö kunnassa K.

Omegaryhmän määritelmä näyttäisi riippuvan siitä, minkälaisena tulona alkio g kirjoitetaan. Voidaan kuitenkin osoittaa, että tulo $\prod_i B(v_i, v_i)$ joko on aina neliö tai sitten ei, riippumatta siitä, miten peilaukset valitaan. Lisäksi on melko helppo todistaa, että omegaryhmä tosiaan on ryhmä, vieläpä ryhmän $SO(V)$ normaali aliryhmä.

5.4 Muodot $\mathbb{R}^n$:ssä, definiittisyys ja Sylvesterin lause

Tässä kappaleessa tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}^n$, mutta tarkastelu voidaan monilta osin yleistää sellaisiin avaruuksiin, joiden kerroinkunta on *täysin järjestettävissä*. Tämä tarkoittaa sitä, että kerroinkunnassa K on olemassa sellainen järjestysrelaatio $<$, että kaikilla alkioilla $a, b, c \in K$ pätee

1) joko $a < b$ tai $b < a$ tai $a = b$

2) jos $a < b$, niin $a + c < b + c$

3) jos $a < b$ ja $c > 0$, niin $ca < cb$.

Äärellisiä kuntia tai kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$ ei voi järjestää.

Määritelmä 5.16. Oletetaan, että B on symmetrinen bilineaarinen muoto vektoriavaruudessa, jonka kerroinkunta on täysin järjestetty. Muotoa B sanotaan *positiivisesti definiitiksi*, jos $B(v, v) > 0$ aina kun $v \neq 0$.

Vastaavasti voidaan määritellä *negatiivinen definiittisyys*. Positiivisesti definiittiä symmetristä bilineaarista muotoa kutsutaan *sisätuloksi*. Seuraavassa luvussa nähdään, että definiittisyyden käsite voidaan yleistää myös kompleksiluvuille, kunhan muodon bilineaarisuus korvataan muilla ehdoilla.

Reaaliavaruudessa positiivisesti (tai yhtä hyvin negatiivisesti) definiitit muodot ovat siitä mielenkiintoisia, että niiden avulla voidaan määritellä vektorien (aidot) pituudet ja niiden väliset kulmat tutuilla kaavoilla

$$|v| = \sqrt{B(v, v)} \qquad \text{ja} \qquad \cos \measuredangle(v, w) = \frac{B(v, w)}{|v||w|}.$$

Positiivinen definiittisyys vaaditaan neliöjuurten ottamista varten. Negatiivisesti definiitin muodon tapauksessa voidaan määritellä $|v| = \sqrt{-B(v, v)}$ jne.

Korollaarin 5.8 mukaan jokainen avaruuden $\mathbb{R}^n$ surkastumaton muoto voidaan esittää matriisilla

$$B = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix},$$

missä $r + s = n$. Paria (r, s) kutsutaan avaruuden *metriseksi merkinnäksi*. Seuraavan lauseen mukaan metrinen merkintä on avaruuden invariantti.

Lause 5.17 (Sylvesterin inertialause). *Olkoon B surkastumaton symmetrinen bilineaarinen muoto avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Oletetaan, että avaruudella on kannat $V_1 = (v_1, \dots, v_n)$ ja $V_2 = (w_1, \dots, w_n)$, joiden suhteen muodon B matriisit ovat*

$$\hat{B}_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \quad ja \quad \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{bmatrix},$$

missä $0 < r \leq s$. Tällöin $r = s$.

Todistus. Olkoot $W_1 = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ ja $W_2 = \langle w_{s+1}, \dots, w_n \rangle$. Olkoon $x = \sum_{i=1}^r x_i v_i \in W_1 \setminus \{0\}$, jolloin $B(x,x) = \sum_{i=1}^r x_i^2 > 0$. Toisaalta, jos $y = \sum_{i=s+1}^n y_i w_i \in W_2$, niin $B(y,y) = -\sum_{i=s+1}^n y_i^2 \leq 0$. Näin ollen $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, joten $\dim W_1 + \dim W_2 \leq n$ eli $r + (n-s) \leq n$, josta $s \leq r$. □

Reaaliavaruudessa jokainen positiivisesti definiitti symmetrinen bilineaarinen muoto on ekvivalentti tavallisen pistetulon kanssa. *Jokainen $\mathbb{R}^n$:n sisätulo on siis ekvivalentti pistetulon kanssa.* Tähän muotoon liittyvää ortogonaalista ryhmää merkitään monissa lähteissä yksinkertaisesti $O(n)$. On helppo tarkistaa, että mikäli kuvaus säilyttää muodon B, se säilyttää myös muodon $-B$, joten negatiivisesti definiitteihin muotoihin liittyy sama ortogonaalinen ryhmä. Myös epädefiniiteillä muodoilla on omat sovelluksensa, kuten seuraavasta esimerkistä nähdään.

Esimerkki 5.18. Suppean suhteellisuusteorian aika-avaruus on neliulotteinen reaaliavaruus. Sen vektorit ovat siis muotoa (t, x_1, x_2, x_3), missä t-komponentti kuvaa aikaa ja muut paikkaa. Näitä *nelivektoreita* kutsutaan myös *tapahtumiksi*. Aika-avaruus noudattaa geometriaa, jota kuvaa symmetrinen bilineaarinen muoto

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tällaista avaruutta kutsutaan *Minkowskin avaruudeksi*. Minkowskin avaruuden ortogonaalinen ryhmä $O_4^{(M)}(\mathbb{R})$ on niin sanottu *Lorentzin ryhmä*. Suhteellisuusteorian mukaan Lorentzin ryhmän alkiot kuvaavat muunnoksia sellaisten koordinaatistojen välillä, jotka liikkuvat tasaisella nopeudella toistensa suhteen. Lorentzin ryhmä sisältää paikka-aliavaruuden $\langle (x_1, x_2, x_3) \rangle$ kierrot ja peilaukset eli tavallisen ortogonaalisen ryhmän $O(3) = O_3(\mathbb{R})$ (pistetulon suhteen).

Lorentzin muunnokset säilyttävät tapahtuman v *nelipituuden* $M(v,v)$. Nelipituuden perusteella tapahtumat voidaan jakaa kolmeen tyyppiin. Jos arvo on positiivinen, tapahtumaa sanotaan *ajanluonteiseksi*, jos se on negatiivinen, *paikanluonteiseksi*, ja jos se on 0, *valonluonteiseksi*. Ajanluonteiset vektorit kuvaavat niitä tapahtumia, joista tieto voi päästä origossa olevaan tapahtumaan valoa hitaammin (tai joihin tieto voi päästä origossa olevasta tapahtumasta). Valonluonteisiin tapahtumiin voi origosta päästä ainoastaan valon nopeudella, ja paikanluonteisiin ei ole mahdollista päästä lainkaan.

Jos rajoitutaan tarkastelemaan yhtä paikkakoordinaattia, Minkowskin avaruus kutistuu hyperboliseksi tasoksi. Isotrooppiset aliavaruudet muodostavat niin kutsutun *valokartion*, joka kuvaa valonsäteen mahdollisia reittejä origosta (tai origoon). Valoa hitaammat kappaleet voivat edetä vain valokartion sillä puolella oleviin pisteisiin v, joissa $M(v,v) > 0$.

5.5 Neliömuodot

Jokaista symmetristä bilineaarista muotoa vastaa tietty *neliömuoto*, joka on sukua vektorin pituudelle eli normille.

Määritelmä 5.19. Olkoon B symmetrinen bilineaarinen muoto avaruudessa V, jonka kerroinkunta on K. Muotoa B vastaava *neliömuoto* on kuvaus $Q : V \to K$, jolle pätee $Q(v) = B(v,v)$.

Ortogonaaliset kuvaukset säilyttävät neliömuodon. Seuraavat neliömuodon ominaisuudet on helppo osoittaa määritelmästä lähtien:

$$Q(v+w) = Q(v) + 2B(v,w) + Q(w) \tag{Q1}$$

$$Q(av) = a^2 Q(v). \tag{Q2}$$

Ortogonaaliset ryhmät voidaan määritellä yhtä hyvin neliömuodon kuin bilineaarisen muodon avulla, koska jos neliömuoto tunnetaan, bilineaarisen muodon arvot saadaan kaavasta

$$B(v,w) = \frac{1}{2}\big(Q(v+w) - Q(v) - Q(w)\big). \tag{5.20}$$

Jos bilineaarisena muotona on tavallinen euklidisen avaruuden pistetulo, niin neliömuoto on $Q(v) = v \cdot v$, ja tämän neliöjuuri on vektorin *normi* eli pituus.

Huom. Kaavassa (5.20) on olennaista, että kerroinkunnan karakteristika ei ole 2, sillä muuten kahdella jakoa ei voida suorittaa. Karakteristikan ollessa kaksi neliömuodot ja ortogonaaliset ryhmät määritellään kuitenkin hieman eri tavalla, mihin palataan tämän luvun lopussa.

Esimerkki 5.21. Tasossa $\mathbb{R}^2$ mahdolliset symmetriset bilineaariset muodot ovat muotoa

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Tällaista muotoa vastaa neliömuoto

$$Q(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Yhtälön $Q(x) = r$ ratkaisujoukko on siis jokin toisen asteen käyrä, ja käänteen jokainen toisen asteen käyrä on jonkin yhtälön $Q(x) = r$ ratkaisujoukko. Lauseesta 5.17 seuraa, että kannanvaihdolla jokainen neliömuoto voidaan palauttaa joko muotoon

$$x_1^2 + x_2^2 \qquad \text{tai} \qquad x_1^2 - x_2^2.$$

Erityisesti tästä seuraa, että jokainen toisen asteen käyrä on joko ellipsi tai hyperbeli.

5.6 Äärelliset kunnat

Jos vektoriavaruuden kerroinkunta on äärellinen, siinä voidaan määritellä korkeintaan kaksi epäekvivalenttia symmetristä bilineaarista muotoa. Seuraavissa lauseissa oletetaan, että B on symmetrinen bilineaarinen muoto avaruudessa V, jonka kerroinkunta on äärellinen. (Kunnan karakteristika on edelleen eri kuin 2.) Molempien lauseiden todistukset sivuutetaan.

Lause 5.22. *Jos V:n dimensio on pariton, löytyy ortogonaalinen kanta, jossa B:n matriisi on diagonaalinen ja diagonaalialkiot ovat järjestyksessä* $(1,-1,1,-1,\ldots,1,-1,-1)$.

Lause 5.23. *Jos V:n dimensio on parillinen, löytyy ortogonaalinen kanta, jossa B:n matriisi on diagonaalinen ja diagonaalialkiot ovat joko*

a) $(1,-1,1,-1,\ldots,1,-1)$ *(+-tyyppi) tai*

b) $(1,-1,1,-1,\ldots,1,-d)$*, missä d ei ole neliö ($-$-tyyppi).*

Äärellisen kerroinkunnan tapauksessa avaruus voidaan siis jakaa suoraksi summaksi kahdesta aliavaruudesta U ja W ($U \cap W = \{0\}$), joista U koostuu pelkästään hyperbolisista tasoista ja sen dimensio on siis välttämättä parillinen. Lisäksi voidaan osoittaa, että W, jonka dimensio on 0, 1 tai 2, ei sisällä yhtään isotrooppista vektoria.

Jos avaruuden dimensio on parillinen, niin $+$-tyypin muotoa vastaavaa ortogonaalista ryhmää merkitään $O^+(V)$ ja $-$-tyypin muotoa vastaavaa ryhmää $O^-(V)$. Parittoman dimension ryhmää merkitään $O^0(V)$.

Esimerkki 5.24. Tarkastellaan tasoa $\mathbb{F}_3^2$, jossa muotona käytetään pistetuloa $B(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$. Tämän muodon matriisi on $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, ja koska -1 ei ole neliö kunnassa $\mathbb{F}_3$, niin muoto on edellisen lauseen kohdassa (b) mainittua tyyppiä.

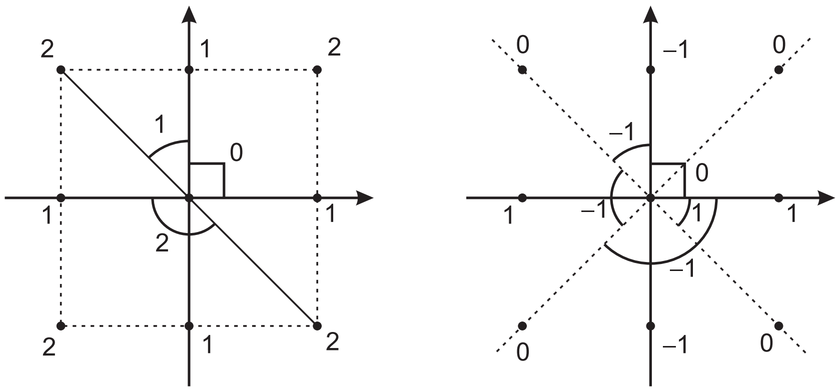
Neliömuodon arvot eli "vektorien pituudet" ovat

$$Q(0,0) = 0, \quad Q(\pm 1, 0) = Q(0, \pm 1) = 1 \quad \text{ja} \quad Q(\pm 1, \pm 1) = 2.$$

Oletetaan nyt, että $g \in O_2^-(3)$. Koska ortogonaaliset kuvaukset säilyttävät neliömuodon arvot, on kullakin vektorilla (paitsi nollavektorilla) vain neljä mahdollista tapaa kuvautua. Esimerkiksi $g(1,0)$ voi olla joko $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ tai $(0,-1)$.

Kun yhden kantavektorin v_1 kuva on valittu, toisen kantavektorin v_2 kuvaksi jää tasan kaksi mahdollisuutta arvojen $g(v_1) \neq \pm g(v_2)$ lineaarisen riippumattomuuden vuoksi. Kumpikin valinta on mahdollinen. Jos esimerkiksi $g(1,0) = (0,1)$, niin $g(0,1)$ voi olla joko $(-1,0)$ tai $(1,0)$; edellisessä tapauksessa $g \in SO_2^-(3)$, jälkimmäisessä $\det g = -1$.

Nähtiin, että ryhmässä $O_2^-(3)$ on 8 alkiota. Itse asiassa bilineaarisen muodon arvoja eli "vektorien välisiä kulmia" tarkkailemalla nähdään, että ortogonaalisten kuvausten on säilytettävä kuvassa 5 näkyvän neliön nurkat nurkkina ja särmät särminä, mistä seuraa, että $O_2^-(3)$ on isomorfinen neliön symmetriaryhmän D_8 kanssa.



Kuva 5: Neliömuodon ja bilineaarisen muodon arvoja −- ja +-tyypin tasoissa

Jos muotona on $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, niin kyseessä on hyperbolinen taso. Tällöin kummallakin kantavektorilla on vain yksi vaihtoehto mihin kuvautua, koska neliömuodon arvot ovat

$$Q(\pm 1, 0) = 1, \quad Q(0, \pm 1) = -1 \quad \text{ja} \quad Q(\pm 1, \pm 1) = Q(0,0) = 0.$$

Tuloksena saadaan neljän alkion ortogonaalinen ryhmä, jossa kaikkien alkioiden kertaluku on kaksi. Onkin niin, että $O_2^+(3)$ on isomorfinen Kleinin neliryhmän kanssa.

5.7 Karakteristikan ollessa 2

Kun kerroinkunnan karakteristika on kaksi, tapahtuu ortogonaalisten ryhmien kannalta kaksi merkittävää asiaa. Ensinnäkin neliömuodosta ei voi johtaa bilineaarisen muodon arvoja, koska kaavaa (5.20) ei voida soveltaa. Toisaalta jokainen determinantti on 1, joten kaikki ortogonaaliset kuvaukset ovat aikaisemman määritelmän mukaisesti kiertoja.

Karakteristikan ollessa kaksi lähdetään bilineaarisen muodon sijasti liikkeelle neliömuodosta, joka määritellään nyt hieman aikaisemmasta poikkeavalla tavalla.

Määritelmä 5.25. *(Kun karakteristika on 2.)* K-kertoimisen avaruuden V *neliömuoto* on funktio $Q : V \to K$, jolle pätee kaikilla $x, y \in V$

$$Q(ax + by) = a^2 Q(x) + abB(x, y) + b^2 Q(y), \tag{5.26}$$

missä B on jokin (tavanomainen) bilineaarinen muoto avaruudessa V.

Nyt neliömuotoa vastaava bilineaarinen muoto on yksikäsitteinen, mutta bilineaarisesta muodosta ei voida johtaa neliömuodon arvoja. Ortogonaaliset kuvaukset määritellään niin, että ne säilyttävät jonkin neliömuodon, eli

$$g \in O(V) \iff Q(g(v)) = Q(v).$$

Jokaisen kuvauksen determinantti on 1, joten $O(V) = SO(V)$. Peilauksia ei voida määritellä, koska $-v = v$ kaikilla vektoreilla v. Peilauksien paikalla voidaan käyttää niin kutsuttuja *transvektioita.* Omegaryhmää vastaava aliryhmä määritellään myös näiden transvektioiden avulla. (Toisinaan tällä tavoin määriteltyä omegaryhmää kutsutaan myös erityiseksi ortogonaaliseksi ryhmäksi, kun karakteristika on 2.)

Kuten aikaisemmin, jos avaruuden kerroinkunta on äärellinen ja dimensio pariton, on kannanvaihtoa vaille olemassa vain yksi neliömuoto. Jos dimensio on parillinen, muotoja on kaksi. Nämä muodot poikkeavat kuitenkin monelta osin niistä muodoista, jotka saadaan parittoman karakteristikan tapauksessa.