6 Unitaariset ryhmät

Unitaariset ryhmät ovat sukua ortogonaalisille ryhmille, ja monilla tässä luvussa esiteltävillä asioilla on vastineensa ortogonaalisten ryhmien teoriassa. Unitaariset ryhmät määritellään hermiittisten muotojen avulla, jotka muun muassa hoitavat sisätulon tehtävää kompleksikertoimisissa avaruuksissa. Hermiittisten muotojen isometrioina unitaariset kuvaukset säilyttävät kompleksiavaruudessa vektorien pituudet ja niiden väliset kulmat samoin kuin ortogonaaliset tekevät euklidisessa avaruudessa.

6.1 Seskvilineaariset[1] muodot

Ennen muotojen määrittelyä on rajoitettava tarkasteltavien vektoriavaruuksien joukkoa. Koko tässä luvussa oletetaan, että vektoriavaruuden kerroinkunnassa K voidaan määritellä *automorfismi* σ, jonka kertaluku on 2. Tämä tarkoittaa sitä, että kuntaan K voidaan liittää kuntaisomorfismi $\sigma : K \to K$, jolle pätee $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. Automorfismin arvoa luvulla a merkitään

$$\sigma(a) = \bar{a}$$

ja kutsutaan luvun a *konjugaattiluvuksi* tai *konjugaatiksi*. Itse automorfismia kutsutaan *konjugoinniksi*. Tavallisin esimerkki konjugoinnista on kompleksikonjugointi $a + bi \mapsto a - bi$. Kaikissa kunnissa konjugointia ei voida määritellä.

Konjugointiin liittyy läheisesti *normikuvaus* N, joka määritellään kaavalla

$$N(a) = a\bar{a} \qquad \text{kaikilla } a \in K.$$

Kompleksiluvuilla normi vastaa luvun modulin neliötä.

Konjugoinnin avulla voidaan määritellä tässä luvussa käytettävät muodot, jotka poikkeavat hieman bilineaarisista muodoista. Oletetaan seuraavassa, että V on K-kertoiminen vektoriavaruus ja että kunnassa K on määritelty konjugointiautomorfismi.

Määritelmä 6.1. Kuvausta $S : V \times V \to K$ kutsutaan *seskvilineaariseksi muodoksi*, jos se täyttää seuraavat ehdot kaikilla $x, y, z \in V$ ja $\lambda \in K$:

$$S(x + z, y) = S(x, y) + S(z, y) \tag{S1}$$
$$S(\lambda x, y) = \lambda S(x, y) \tag{S2}$$
$$S(x, y + z) = S(x, y) + S(x, z) \tag{S3}$$
$$S(x, \lambda y) = \bar{\lambda} S(x, y) \tag{S4}$$

Seskvilineaariset kuvaukset poikkeavat bilineaarisesta vain ehdon (S4) kohdalla. Jos avaruudelle V on valittu kanta $T = (v_1, \ldots, v_n)$, niin seskvilineaarisen muodon S matriisi $\hat{S} = [s_{ij}]$ määritellään tuttuun tapaan kaavalla

[1] Etuliite *sesqui-* tarkoittaa latinassa "...ja puoli", esimerkiksi *sesquimensis* = "puolitoista kuukautta".

$s_{ij} = S(v_i, v_j)$. Tällöin kaikilla sarakevektoreilla x ja y pätee

$$S(x,y) = x^\top \hat{S}\bar{y} \qquad \text{(huomaa konjugointi)}.$$

Isometrialle L saadaan siis ehto $L^\top \hat{S}\bar{L} = \hat{S}$.

Tässä luvussa ollaan kiinnostuneita vain tietynlaisista seskvilineaarisista muodoista.

Määritelmä 6.2. Jos avaruuden V seskvilineaarinen muoto S toteuttaa lisäksi ehdon

$$S(x,y) = \overline{S(y,x)} \quad \text{kaikilla } x, y \in V, \tag{H}$$

muotoa S kutsutaan *hermiittiseksi.*

Hermiittistä muotoa vastaavalle matriisille pätee $S^\top = \bar{S}$. Tällaista matriisia kutsutaan *hermiittiseksi matriisiksi.* Voidaan myös osoittaa, että jokainen hermiittinen matriisi vastaa jotain hermiittistä muotoa (kannasta riippumatta).

Jokaisella kunnalla K, jolla on konjugointiautomorfismi σ, on myös alikunta

$$K_0 = \mathrm{Fix}(\sigma) = \{a \in K \mid \sigma(a) = a\}.$$

Kompleksilukujen tapauksessa $\mathbb{C}_0 = \mathbb{R}$. Hermiittiselle muodolle S pätee aina $S(x,x) = \overline{S(x,x)}$, joten $S(x,x) \in K_0$ kaikilla vektoreilla x.

Määritelmä 6.3. Oletetaan, että S on hermiittinen muoto K-kertoimisessa avaruudessa V. Kuvausta $Q : V \to K$, $Q(v) = S(v,v)$ kutsutaan *(hermiittiseksi) neliömuodoksi.*

Hermiittiselle neliömuodolle pätee

$$Q(\lambda v) = \lambda\bar{\lambda} Q(v) \qquad \text{kaikilla } v \in V \text{ ja } \lambda \in K.$$

Lisäksi tietysti $Q(v) = S(v,v) \in K_0$ kaikilla $v \in V$.

6.2 Kohtisuoruus

Hermiittiselle muodolle S pätee $S(x,y) = 0$ jos ja vain jos $S(y,x) = 0$, eli muoto on refleksiivinen. Samoin kuin refleksiivisten bilineaaristen muotojen tapauksessa määritellään vektorien x ja y kohtisuoruus ehdolla $S(x,y) = 0$. Myös kohtisuorat komplementit ja avaruuden radikaali määritellään kuten aikaisemmin. Jos $\mathrm{rad}(V) \neq \{0\}$, sanotaan että V on surkastunut.

Samoin kuin symmetrisen bilineaarisen muodon tapauksessa, voidaan hermiittinen muoto aina esittää tietyssä perusmuodossa. Olkoon S surkastumaton hermiittinen muoto K-kertoimisessa avaruudessa V, ja olkoon Q sitä vastaava neliömuoto.

Lemma 6.4. *Jollakin $v \in V$ pätee $Q(v) \neq 0$.*

Todistus. Oletetaan vastoin väitettä, että $Q(v) = 0$ kaikilla $v \in V$. Koska S ei ole surkastunut, löydetään vektorit v ja w, joille pätee $S(v, w) = 1$. (Jos $S(v, w) = \mu \neq 0$, vaihdetaan $v \mapsto \mu^{-1}v$.) Tällöin kaikilla $\lambda \in K$ pätee

$$0 = Q(v + \lambda w) = \underbrace{Q(v)}_{=0} + S(v, \lambda w) + S(\lambda w, v) + \underbrace{Q(w)}_{=0} = \lambda + \bar{\lambda}.$$

Jos $\lambda = 1$, niin $1 + \bar{1} = 2 = 0$, joten kerroinkunnan karakteristika on 2. Tällöin kuitenkin $\bar{\lambda} = -\lambda = \lambda$ kaikilla $\lambda \in K$, joten konjugointiautomorfismi on identtinen kuvaus. Tämä on ristiriita, koska konjugointiautomorfismin kertaluku on kaksi. □

Lause 6.5. *Avaruudella V on kanta $(v_1, \ldots, v_n)$, jonka suhteen $\hat{S}$ on diagonaalimatriisi. Lisäksi $Q(v_i) = \hat{S}_{ii} \in K_0^*$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Todistus. Todistus etenee samalla tavalla kuin lauseessa 5.5. □

Samoin kuin symmetrisillä bilineaarisilla muodoilla, myös hermiittisillä muodoilla voidaan matriisiesityksen diagonaalialkioita skaalata. Nyt kuitenkin kantavektorin muunnos $v_i' = c_i v_i$ aiheuttaa diagonaalialkion muunnoksen $b_i' = c_i \bar{c}_i b_i$, eli diagonaalialkioita voi skaalata vain sellaisilla luvuilla, jotka ovat muotoa $\lambda\bar{\lambda} \in K_0^*$. Esimerkiksi kompleksiluvuilla $\lambda\bar{\lambda}$ on aina positiivinen, joten päädytään samanlaiseen tilanteeseen kuin Sylvesterin inertialauseessa, jossa muodon määrittää diagonaalilla olevien lukujen 1 ja -1 määrät. Toisaalta, jos kerroinkunta on äärellinen, muotoja on vain yksi.

Lause 6.6. *Jos avaruuden V kerroinkunta K on äärellinen, niin V:llä on kanta $(v_1, \ldots, v_n)$, jonka suhteen $\hat{S} = I_n$.*

Todistus. Sivuutetaan. □

6.3 Unitaarisen ryhmän määritelmä

Määritelmä 6.7. Oletetaan, että S on surkastumaton hermiittinen muoto vektoriavaruudessa V. Jos lineaarikuvaus g säilyttää muodon S, niin sanotaan että g on *unitaarinen* (muodon S suhteen). Unitaaristen kuvausten ryhmää kutsutaan *unitaariseksi ryhmäksi* ja merkitään $U^{(S)}(V)$.

Jos S on hermiittinen muoto ja $g \in U^{(S)}(V)$, niin $g^\top \hat{S} \bar{g} = \hat{S}$. Laskemalla determinantit ja jakamalla luvulla $\det \hat{S}$ nähdään, että

$$\det g \cdot \overline{\det g} = 1.$$

Toisin kuin ortogonaalisten ryhmien tapauksessa, determinantin arvot eivät ole yleensä rajoitettuja äärelliseen joukkoon. Kuitenkin $N(\det g) = 1$ kaikilla $g \in U(V)$, missä N on kerroinkunnan normikuvaus.

Määritelmä 6.8. *Erityinen unitaarinen ryhmä* on

$$SU^{(S)}(V) = \{g \in U^{(S)}(V) \mid \det g = 1\}.$$

Erityinen unitaarinen ryhmä on ryhmän $U(V)$ normaali aliryhmä. Voidaan osoittaa, että $U(V)/SU(V) \cong \operatorname{Ker} N$, missä N on kerroinkunnan normikuvaus. Todistus on harjoitustehtävänä.

Kuten aiemmin, projektiiviset unitaariset ryhmät $PU(V)$ ja projektiiviset erityiset unitaariset ryhmät $PSU(V)$ määritellään ottamalla tekijäryhmät ryhmistä $U(V)$ ja $SU(V)$ skalaarimatriisien suhteen.

6.4 Kerroinkuntana $\mathbb{C}$

Kun vektoriavaruus on kompleksikertoinen, automorfismina σ toimii kompleksikonjugointi, alikunta $\operatorname{Fix}(\sigma)$ on $\mathbb{R}$, ja luvun λ normi $N(\lambda)$ on sen modulin neliö $|\lambda|^2$.

Koska jokaiselle hermiittiselle neliömuodolle Q pätee $Q(v) \in \mathbb{R}$, niin voidaan määritellä positiivinen definiittisyys.

Määritelmä 6.9. Hermiittinen muoto S on *positiivisesti definiitti*, jos kaikilla vektoreilla $v \neq 0$ pätee $S(v, v) > 0$.

Positiivisesti definiittiä hermiittistä neliömuotoa kutsutaan *sisätuloksi*. Sen avulla voidaan määritellä vektorien pituudet ja niiden väliset kulmat aivan samoin kuin bilineaarisen sisätulon tapauksessa. Tavallisesti avaruuden $\mathbb{C}^n$ pistetulo määritellään myös hermiittisen muodon mukaisesti:

$$v \cdot w = \sum_i v_i \bar{w}_i.$$

Tämä pistetulo on sisätulo, toisin kuin tavallinen pistetulo (kompleksiavaruudessa).

Esimerkki 6.10. Tarkastellaan sarakevektoriavaruuksia $\mathbb{C}^n$, joissa on muotona hermiittinen pistetulo $x \cdot y = \sum_i x_i y_i$.

Ryhmä $U(1) = U_1(\mathbb{C})$ koostuu 1×1-matriiseista eli kompleksiluvuista $z = a + bi$, joille pätee $z\bar{z} = 1$ kaikilla $z \in U(1)$. Koska $z\bar{z} = a^2 + b^2$, nämä kompleksiluvut sijaitsevat kompleksitason yksikköympyrällä. Vastaava erityinen unitaarinen ryhmä on triviaali, koska kaikilla $z \in SU(1)$ täytyy päteä $z = \det z = 1$.

Ryhmä $U(2) = U_2(\mathbb{C})$ koostuu kaksiulotteisista matriiseista g, joilla $g^\top \bar{g} = I$. Merkitään $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$, jolloin unitaarisuusehdosta saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} a\bar{a} + c\bar{c} &= |a|^2 + |c|^2 = 1 \\ b\bar{b} + d\bar{d} &= |b|^2 + |d|^2 = 1 \\ a\bar{b} + c\bar{d} &= 0 \end{cases}.$$

Ensimmäisistä ehdoista nähdään, että pisteet (a, c) ja (b, d), jotka ovat siis kantavektorien arvot, sijaitsevat avaruudessa $\mathbb{C}^2$ yksikköpallon pinnalla. Kolmas ehto puolestaan voidaan kirjoittaa muodossa $d = -\bar{a}b/\bar{c}$, mikä tarkoittaa sitä, että lukujen a, b ja c arvot määräävät myös luvun d (kunhan $c \neq 0$).

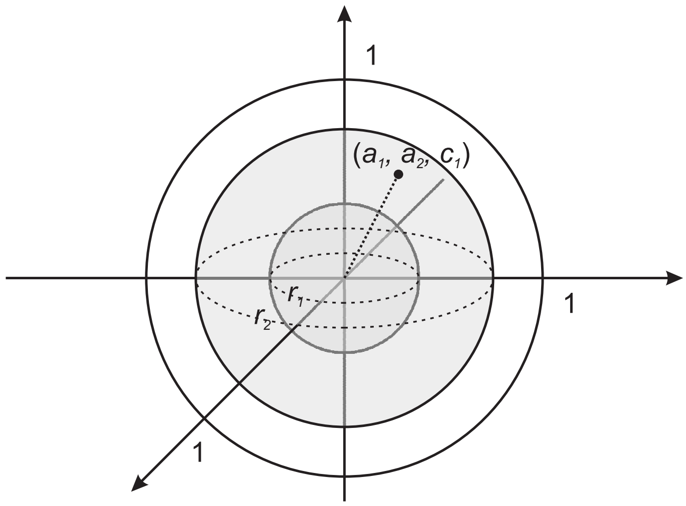
Erityisessä unitaarisessa ryhmässä $SU(2)$ saadaan vielä yksi lisäehto, nimittäin $ad - bc = 1$. Ratkaisemalla tästä $d = (bc+1)/a$ ja käyttämällä ylempänä mainittua ehtoa $d = -\bar{a}b/\bar{c}$, saadaan yhtälöt $b = -\bar{c}$ ja $d = \bar{a}$. Siispä jokainen erityisen unitaarisen ryhmän matriisi on itse asiassa muotoa

$$g = \begin{bmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix}, \qquad \text{missä} \quad |a|^2 + |c|^2 = 1.$$

Jos nyt merkitään $a = a_1 + a_2 i$ ja $c = c_1 + c_2 i$, voidaan kirjoittaa

$$a_1^2 + a_2^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

Samastamalla $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ huomataan, että jokainen ryhmän $SU(2)$ alkio vastaa itse asiassa jotain 3-ulotteisen pallonkuoren pinnan pistettä avaruudessa $\mathbb{R}^4$. Toisaalta, jos esimerkiksi $c_2 \in [-1, 1]$ on kiinnitetty, mahdolliset alkiot vastaavat sellaisen $\mathbb{R}^3$:n kaksiulotteisen pallonkuoren pisteitä, jonka säde on $\sqrt{1 - c_2^2}$. Kun luku c_2 käy läpi kaikki luvut -1:stä 1:een, pallonkuori kasvaa origosta 1-säteiseksi ja takaisin, täyttämällä kahdesti koko suljetun yksikkökuulan.



Kuva 6: Ryhmän $SU(2)$ alkiot vastaavat pisteitä pallonkuorilla, joiden säde on $r = \sqrt{1 - c_2^2}$. Jokaista nollasta poikkeavaa sädettä vastaa kaksi identtistä pallonkuorta, joista toisella $c_2 > 0$, toisella $c_2 < 0$.

Kompleksikertoimisten avaruuksien unitaariset ryhmät ovat erityisen tärkeitä kvanttimekaniikassa.

Esimerkki 6.11. Kvanttimekaniikassa mitä tahansa hiukkasta, kuten elektronia, voidaan kuvata *aaltofunktiolla* ψ, joka on ajan ja paikan funktio. Aaltofunktion arvot ovat kompleksilukuja, joilla ei sinänsä ole mitään fysikaalista merkitystä. Kuitenkin *todennäköisyys*, jolla aallon ψ kuvaama hiukkanen on tietyllä hetkellä t paikassa x, on $|\psi(t, x)|^2$.

Olkoon ψ elektronia kuvaava aaltofunktio. Jos c on nyt jokin kompleksiluku, jolle $|c| = 1$, niin

$$|\psi(t, x)| = |c\psi(t, x)|.$$

Todennäköisyys, että hiukkanen löytyy tietystä paikasta ei siis muutu, vaikka aaltofunktiota kerrottaisiin vakiolla c. Koska $c \in U(1)$, sanotaan, että elektronin aaltofunktion symmetriaryhmä on $U(1)$.

Liikkuvan elektronin tapauksessa voidaan ajatella, että termi c on itse asiassa paikan x funktio, eli että aaltofunktion arvot ovat muotoa $c(x)\psi(t, x)$. Tämä lisäoletus ei edelleenkään vaikuta elektronin sijainnin todennäköisyyksiin. Johtamalla tästä elektronin liikeyhtälöt, nähdään, että elektroni itse asiassa vuorovaikuttaa sähkömagneettista vuorovaikutusta välittävien *fotonien* kanssa. Lisäksi voidaan määrittää tämän vuorovaikutuksen voimakkuus.

Sama ajattelu voidaan toistaa muidenkin hiukkasten tapauksessa muita symmetrioita käyttämällä. Nykyfysiikan mukaan protonit ja neutronit koostuvat kvarkeista, joilla on ominaisuus, jota kutsutaan *väriksi*. Värejä on kolme erilaista, ja erivärisillä kvarkeilla on täsmälleen samat fysikaaliset ominaisuudet. Kvarkkien värin symmetriaryhmä on $SU(3)$, jonka alkiot "vaihtavat erivärisiä kvarkkeja toisikseen". Edelleen voidaan olettaa, että kvarkkien värijakauma on paikasta riippuva funktio, ja liikeyhtälöt johtamalla nähdään, että kvarkit vuorovaikuttavat vahvaa vuorovaikutusta välittävien *gluonien* kanssa.

Erityistä yllä mainituissa esimerkeissä on se, että tapa, jolla liikeyhtälöt johdetaan, perustuu vain kyseessä olevan symmetriaryhmän ominaisuuksiin sekä joihinkin yleisiin fysikaalisiin periaatteisiin. Hiukkasfyysikot pyrkivät yhtenäistämään kaikki luonnossa havaittavat perusvuorovaikutukset, ja eräs tapa lähestyä tätä tehtävää on tutkia, minkälainen ryhmä voisi sopivalla tavalla sisältää kaikki yksittäisiin vuorovaikutuksiin liittyvät symmetriaryhmät.

6.5 Äärelliset kunnat

Äärellisissä kunnissa tilanne on hyvin rajoitettu. Ensinnäkin lauseen 6.6 mukaan on kannanvaihtoa vaille olemassa vain yksi hermiittinen muoto. Toisaalta voidaan osoittaa, että läheskään kaikissa kunnissa ei voida määritellä tarvittavaa automorfismia.

Lause 6.12. *Äärellisessä kunnassa voidaan määritellä konjugoiva automorfismi σ jos ja vain jos kunnan kertaluku q on neliö. Myönteisessä tapauksessa saatava automorfismi on muotoa $\sigma(a) = a^{\sqrt{q}}$.*

Lauseen todistus ei ole vaikea, mutta se vaatii esitietoja kuntalaajennosten teoriasta. Ideana on, että jos kunnassa K on konjugaatioautomorfismi σ, niin K on kaksiulotteinen vektoriavaruus, jonka kertoimet ovat alikunnassa $K_0 = \mathrm{Fix}(\sigma)$. Tällöin nimittäin pätee $|K| = |K_0|^2$. Yksityiskohdat sivuutetaan.

Yllä olevasta lauseesta seuraa muun muassa, että alkukunnissa $\mathbb{F}_p$ ei voida määritellä konjugointia. Tarkastellaan seuraavassa esimerkissä sitä, miten ylipäänsä voidaan määritellä muita äärellisiä kuntia.

Esimerkki 6.13. Tiedetään, että on olemassa yhdeksänalkioinen kunta $\mathbb{F}_9$, jonka karakteristika on kolme. Tämä kunta voidaan määritellä lähtemällä alkukunnasta $\mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\}$. Aluksi etsitään $\mathbb{F}_3$-kertoiminen toisen asteen polynomi, jolla ei ole juuria kunnassa $\mathbb{F}_3$. Tällainen on esimerkiksi

$$x^2 + 1,$$

sillä $(\pm 1)^2 + 1 = -1 \neq 0$. Lisätään nyt tähän kuntaan kyseisen polynomin juuret seuraavasti: Koska polynomi $x^2 + 1$ ei jakaudu tekijöihin (sillä ei ole juuria) polynomirenkaassa $\mathbb{F}_3[x]$, niin sen virittämä pääideaali $\langle x^2 + 1\rangle$ on maksimaalinen. Tämä tarkoittaa sitä, että tekijärengas $\mathbb{F}_3[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ on kunta. Kyseisessä tekijärenkaassa on alkioina sivuluokat $a + \langle x^2 + 1\rangle$, missä a on jokin polynomeista

$$0, \quad 1, \quad -1, \quad x, \quad x+1, \quad x-1, \quad -x, \quad -x+1 \quad \text{ja} \quad -x-1.$$

Toisaalta $x^2+1 \in \langle x^2+1\rangle$, joten polynomin x^2+1 sivuluokka on $0+\langle x^2+1\rangle$. Näin ollen $x + \langle x^2 + 1\rangle$ on tekijärenkaassa polynomin $x^2 + 1$ juuri.

Nimetään nyt tekijärengas $\mathbb{F}_3[x]/\langle x^2 + 1\rangle$ kunnaksi $\mathbb{F}_9$ ja merkitään polynomia x symbolilla i. Näin on saatu kunta

$$\mathbb{F}_9 = \{0,\ 1,\ -1,\ i,\ i+1,\ i-1,\ -i,\ -i+1,\ -i-1\},$$

jossa $i^2 = -1$. Konjugoivana automorfismina on $\bar{a} = a^3$, jolla $\bar{i} = i^2 \cdot i = -i$.

Koska vain niissä kunnissa, joiden kertaluku on neliö, on mahdollista määritellä konjugaatioautomorfismi, äärellisiä unitaarisia ryhmiä on tapana merkitä $U_n(\mathbb{F}_{q^2}) = U_n(q)$ ja vastaavasti $SU_n(\mathbb{F}_{q^2}) = SU_n(q)$. Kirjallisuudessa tapaa kuitenkin tästä poikkeavia käytäntöjä.