9 Lien teoria

9.1 Tausta

Norjalaisella matemaatikolla Sophus Marius Liellä (1842–1899) oli unelma. Hän oli kuullut Evariste Galois'n teoriasta, jossa tämä liitti kuhunkin polynomiyhtälöön tietyn symmetriaryhmän, joka permutoi yhtälön ratkaisuja pitäen kerroinkunnan paikallaan. Galois oli onnistunut tämän symmetriaryhmän avulla määrittämään tarkat ehdot sille, milloin polynomiyhtälö voidaan ratkaista analyyttisesti, ja tätä keksintöä pidetään ryhmäteorian ja modernin algebran alkuna. Ottaen mallia Galois'n teoriasta, Lie halusi löytää differentiaaliyhtälöihin liittyvät symmetriaryhmät, jotka auttaisivat yhtälön ratkaisujen löytämisessä.

Lien oivallus, jonka hän mainitsi 1871 väitöskirjassaan "Über eine Classe geometrischer Transformationen", perustui hänen aikaisempiin differentiaaligeometrian tutkimuksiinsa. Hän huomasi, että reaaliluvuilla parametrisoitu muunnosryhmä säilyttää differentiaaliyhtälön muodon vain jos ryhmän *tangenttiavaruudella* on tietty rakenne. Lien pyrkimys oli luokitella kaikki tällaiset tangenttiavaruudet, ja käyttää sitten tätä luokittelua differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseksi.

Vaikka Lien tavoite ei koskaan täysin toteutunut, Lie tuli kehittäneeksi "jatkuviksi" kutsumiensa ryhmien teorian, joka on vieläkin pääasiallinen työkalu näiden ryhmien tutkimisessa. Hänen mukaansa näitä ryhmiä kutsutaan nykyisin *Lien ryhmiksi.*

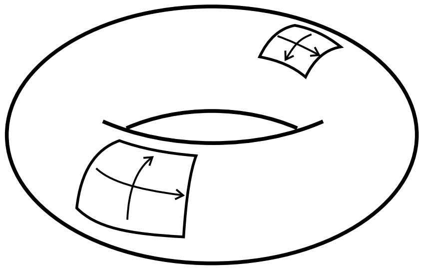
9.2 Differentiaaligeometriaa

Lien ryhmien määrittelemiseksi tarvitsemme *derivoituvia monistoja.* Emme määrittele tässä tällaisia monistoja täsmällisesti; riittää ajatella, että n-ulotteinen monisto on topologinen avaruus[3], jonka jokaisella pisteellä on avaruutta $\mathbb{R}^n$ muistuttava ympäristö (homeomorfinen sen kanssa). Tällaista ympäristöä kutsutaan *kartaksi*, ja sille saadaan koordinaatisto avaruudesta $\mathbb{R}^n$. Koko monisto voidaan peittää kartoilla, jotka menevät osaksi limittäin. Derivoituvuus tarkoittaa tässä yhteydessä sitä, että koordinaatistonmuunnos kahden limittäin menevän kartanosan välillä on derivoituva[4]. Jos M on derivoituva monisto, niin kuvausten $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to M$ ja $\gamma : \mathbb{R} \to M$ derivaatat pisteessä x voidaan määritellä jokin sopivan x:n sisältävän kartan koordinaatiston avulla.

Määritelmä 9.1. *Lien ryhmä* on derivoituva monisto M, joka on samalla ryhmä jonkin laskutoimituksen suhteen, ja jonka kuvaukset $\mu : (x, y) \mapsto xy$ ja $\iota : x \mapsto x^{-1}$ ovat derivoituvia.

[3] Oikeastaan Hausdorff-avaruus, jolla on numeroituva kanta.

[4] Lien ryhmien yhteydessä derivoituvalla kuvauksella tarkoitetaan reaalianalyyttistä kuvausta eli kuvausta, jolla on kaikkien kertalukujen derivaatat.



Kuva 8: Kaksiulotteinen monisto, jolla kaksi karttaa

Esimerkki 9.2. Tarkastellaan tason yksikköympyrää S. Jokaisella yksikköympyrän pisteellä on ympäristö, joka on homeomorfinen lukusuoran $\mathbb{R}$ kanssa. Ympyrä voidaan peittää kahdella kartalla esimerkiksi seuraavasti: Kuvaus $h_1 : (0, 2\pi) \to S$, $h_1(t) = (\cos t, \sin t)$ peittää koko ympyrän pistettä $(1, 0)$ lukuunottamatta. Vastaavasti kuvaus $h_2 : (0, 2\pi) \to S$, $h_2(t) = (\cos(t - \pi), \sin(t - \pi))$ peittää ympyrän pistettä $(-1, 0)$ lukuunottamatta. Alueella, jossa kartat menevät limittäin, koordinaatistonmuunnos kahden kartan välillä tapahtuu kuvauksella $t \mapsto t - \pi$, joka on selvästi derivoituva.[5]

Tason kierrot voidaan parametrisoida reaaliparametrilla φ, joka kertoo kiertokulman origon ympäri. Jokaista kulmaa välillä $[0, 2\pi)$ vastaa oma kiertonsa. Kiertoryhmä $SO(2)$ voidaan samastaa yksikköympyrän kanssa siten, että jokainen ympyrän piste vastaa kiertoa sen kulman ympäri, jonka piste muodostaa positiivisen x-akselin kanssa. Tällaisen kierron matriisi on

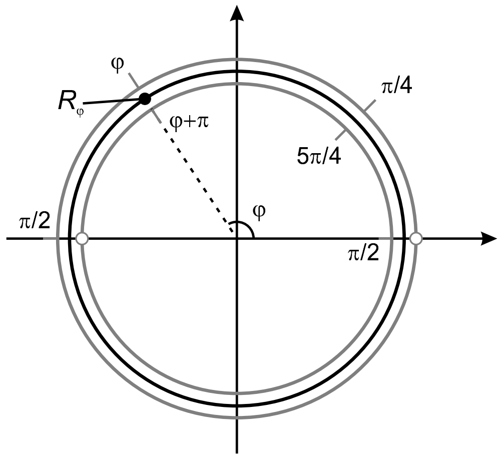
$$R_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Tällä tavoin ryhmälle $SO(2)$ saadaan yksikköympyrältä topologia ja derivoituvan moniston rakenne.

Tarkistetaan, että alkion kääntäminen on monistolla derivoituva kuvaus. Olkoon R_φ jokin kierto, jolla $\varphi \neq 0$. Tätä kiertoa vastaa ympyrällä piste $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, joka on kuvauksen h_1 määrittämällä kartalla. Tällä kartalla kierron koordinaatti on φ. Kierron käänteisalkio $\mathbb{R}_{-\varphi}$ on samalla kartalla kuin kierto itse, ja sen koordinaatti on $-\varphi$. Siispä koordinaatistossa (avoimella välillä $(0, 2\pi)$) alkion R_φ kääntävä kuvaus on $\varphi \mapsto -\varphi$, joka on selvästi derivoituva.

Jos taas $\varphi \neq \pi$, niin kiertoa vastaava piste on kuvauksen h_2 määrittämällä kartalla, ja sen koordinaatti on $\varphi + \pi$. Kierron käänteisalkio on jälleen samalla kartalla, koordinaattinaan $-\varphi + \pi$. Alkion kääntäminen on siis myös tässä koordinaatistossa derivoituva kuvaus $\varphi \mapsto -\varphi$. Vastaavasti voidaan

[5] Tässä käytettiin karttoina avoimen välin kuvia koko lukusuoran $\mathbb{R}$ sijasta. Tällä ei ole kuitenkaan merkitystä, koska koko lukusuora voidaan kuvata avoimelle välille sopivalla derivoituvalla bijektiolla.



Kuva 9: Yksikköympyrä voidaan peittää kahdella avoimella välillä. Kierrot vastaavat ympyrän pisteitä.

tarkistaa, että alkioiden tulo on derivoituva kuvaus, joten $SO(2)$ on Lien ryhmä.

Lien aliryhmä H on Lien ryhmän G aliryhmä, joka on samalla moniston G alimonisto. Niin kutsutun *Cartanin lauseen* mukaan jokainen G:n (topologisesti) suljettu aliryhmä on Lien ryhmä.

Kompleksiset monistot määritellään täsmälleen samalla tavalla kuin reaaliset: jokaisella pisteellä täytyy olla ympäristö, joka on homeomorfinen avaruuden $\mathbb{C}^n$ kanssa. Derivoituvuus tarkoittaa tällöin kompleksista derivoituvuutta. Myös Lien ryhmät voivat olla kompleksisia monistoja, mutta ellei toisin sanota, pitäydymme jatkossa reaalisissa monistoissa.

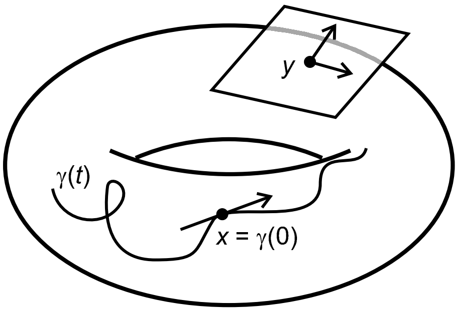
9.3 Tangenttivektorit ja kommutaattorit

Olkoon x jokin piste n-ulotteisella derivoituvalla monistolla M. Pisteen x kautta kulkevalla *derivoituvalla käyrällä* tarkoitetaan derivoituvaa kuvausta $\gamma : \mathbb{R} \to M$, jolla pätee $\gamma(0) = x$. Käyrän γ derivaatta pisteessä x kertoo polun *suunnan pisteessä x* ja sitä kutsutaan *tangenttivektoriksi pisteessä x*. Jos tarkastellaan kaikkia pisteen x kautta kulkevia käyriä ja samastetaan samansuuntaiset keskenään, muodostuu tangenttivektoreista vektoriavaruus, jota kutsutaan *tangenttiavaruudeksi pisteessä x*.

Olkoon M Lien ryhmä, ja olkoon γ neutraalialkion 1 kautta kulkeva käyrä. Differentiaalilaskennasta tiedetään, että kun $h \in \mathbb{R}$ on riittävän pieni, voidaan arvioida

$$\gamma(h) \approx \gamma(0) + \gamma'(0)h = 1 + \gamma'(0)h.$$

Termiä $\gamma'(0)h$ voidaan pitää ryhmän M *infinitesimaalisena alkiona*.



Kuva 10: Polun γ tangenttivektori pisteessä x sekä tangenttitaso pisteessä y.

Jos M on Lien ryhmä, pisteessä $g \in M$ voidaan määritellä tangenttitaso kahdella tavalla: joko määritellään tangenttitaso suoraan pisteen g kautta kulkevien käyrien avulla, tai sitten siirretään kuvauksen $h \mapsto gh$ avulla neutraalialkio 1 pisteeseen g, ja käytetään neutraalialkion kohdalla määriteltyä tangenttitasoa. Osoittautuu, että nämä tuottavat saman tuloksen. Sanotaan, että moniston M tangenttivektorien muodostama vektorikenttä[6] on *invariantti vasemmalta kertomisen suhteen.*

Tärkeä tangenttivektorien välinen operaatio on *kommutaattori* $[x, y]$, jota kutsutaan myös *Lien derivaataksi.* Sen täsmällinen määritelmä sivuutetaan, mutta se kuvaa tangenttivektorin y hetkellistä muutosnopeutta, kun sitä siirretään tangenttivektorin x suunnassa. Kommutaattorilla on läheinen yhteys ryhmän M konjugointiin. Lisäksi vektorien $[x, y]$ muodostama vektorikenttä on invariantti vasemmalta kertomisen suhteen, aivan kuten tangenttivektorien muodostamat kentät, joten kommutaattorivektoreita voidaan siirrellä vapaasti pitkin monistoa ryhmän alkioilla kertomalla.

9.4 Lien matriisiryhmät

Monet Lien ryhmistä ovat itse asiassa lineaarikuvausten ryhmiä, joten niiden alkioita voidaan ajatella matriiseina. Tarkastellaan helpoimpana esimerkkinä kaikkien kääntyvien matriisien ryhmää $GL_n(\mathbb{R})$. Matriisia $X = [x_{ij}]$ voidaan ajatella avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ vektorina $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn})$. Kääntyvät eli ehdon $\det(X) \neq 0$ toteuttavat matriisit muodostavat tällöin koko avaruuden avoimen osajoukon, joka on n^2-ulotteinen derivoituva monisto (kartat saadaan suoraan ympäröivästä avaruudesta $\mathbb{R}^{n^2}$). Yksikkömatriisin kautta kulkeva käyrä on muotoa $\Gamma(t) = [\gamma_{ij}(t)]$, ja tangenttivektori pisteessä I_n on vastaavasti $\Gamma'(0) = [\gamma'_{ij}(0)]$. Osoittautuu, että koska $GL_n(\mathbb{R})$ on avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ avoin osajoukko, voidaan missä tahansa pisteessä määritellä kaikensuuntaisia käyriä, joten luvuilla $\gamma'_{ij}(0)$ ei ole mitään ulkoisia rajoitteita. Näin ollen pisteeseen x liitettävä tangenttiavaruus on itse asiassa kaikkien $n \times n$-matriisien muodostama avaruus $L_n(\mathbb{R})$.

[6]Vektorikenttä on kuvaus, joka liittää moniston jokaiseen pisteeseen tietyn vektorin.

Cartanin lauseen avulla voidaan osoittaa, että kaikki klassiset ryhmät ovat Lien ryhmiä. Tarkastellaan esimerkiksi $\mathbb{R}^n$:n tavallisten kiertojen muodostamaa erityistä ortogonaalista ryhmää $SO(n) = SO_n(\mathbb{R})$. Tangenttivektorit voidaan laskea seuraavasti: Olkoon $\Gamma'(t) = [\gamma'_{ij}(t)]$ jokin yksikkömatriisi kautta kulkeva käyrä. Ortogonaalisuuden määritelmän mukaan $\Gamma(t)^\top \Gamma(t) = I_n$ eli

$$\left(\Gamma(t)^\top \Gamma(t)\right)(i,j) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ki}(t)\gamma_{kj}(t) = \delta_{ij},$$

missä $\delta_{ij} = 1$ jos $i = j$, muuten $\delta_{ij} = 0$. Derivoimalla yhtälö puolittain pisteessä $t = 0$ saadaan

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\gamma'_{ki}(0)\gamma_{kj}(0) + \gamma_{ki}(0)\gamma'_{kj}(0)\right) = \gamma'_{ji}(0) + \gamma'_{ij}(0) = 0, \tag{9.3}$$

sillä $\gamma(0) = I_n$ (joten $\gamma_{jk}(0) = 0$ jos $j \neq k$) ja $D(I_n) = 0$ (vakion derivaatta). Yhtälöstä (9.3) nähdään, että ortogonaalisen ryhmän tangenttitaso pisteessä I_n koostuu antisymmetrisistä matriiseista.

Yllä olevassa esimerkissä ei itse asiassa käytetty determinanttiehtoa lainkaan. Voidaankin osoittaa, että ryhmillä $O_n(\mathbb{R})$ ja $SO_n(\mathbb{R})$ on samat tangenttiavaruudet. Erona näiden Lien ryhmien välillä on se, että $SO_n(\mathbb{R})$ on monistona yhtenäinen, kun taas $O_n(\mathbb{R})$ koostuu kahdesta erillisestä komponentista, joista toisella $\det g = 1$, toisella $\det g = -1$.

Kommutaattoreille saadaan matriisiryhmien tapauksessa yksinkertainen yhtälö: jos $X, Y \in L_n(\mathbb{R})$ ovat tangenttivektoreita, niin

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Tämän yhtälön avulla on helppo johtaa kommutaattoreiden ominaisuuksia, kuten $[X, X] = 0$ ja $[X, Y] = -[Y, X]$.

9.5 Eksponenttikuvaus ja yksiparametriset aliryhmät

Matriiseilla voidaan määritellä *eksponenttikuvaus* sarjakehitelmän avulla:

$$\exp A = e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots .$$

Voidaan osoittaa, että tämän sarjan osasummilla on raja-arvo, joten eksponenttikuvaus on hyvin määritelty. Ei vaadi paljon vaivaa tarkistaa, että $\exp(0) = I_n$ ja $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$. Kuitenkin $\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B$ pätee vain, jos $AB = BA$.

Eksponenttikuvauksen avulla voidaan määritellä halutunsuuntaisia käyriä, jotka ovat samalla Lien ryhmän aliryhmiä. Tällaista käyrää sanotaan yksiparametriseksi aliryhmäksi. Jos G on Lien matriisiryhmä ja A on jokin tangenttivektori pisteessä I_n, niin käyrälle $\gamma(t) = \exp(tA)$ pätee $\gamma(0) = I_n$, ja joukko $\{\gamma(t)\}$ on G:n aliryhmä. Lisäksi

$$\gamma'(0) = A \exp(0 \cdot A) = A,$$

joten A on käyrän $\gamma(t)$ tangenttivektori. Voidaan myös osoittaa, että muita yksiparametrisiä aliryhmiä, joilla olisi sama ominaisuus, ei ole.

Yksiparametrisia aliryhmiä voidaan käyttää muodostamaan Lien ryhmän alkioita annetuista tangenttivektoreista. Jos Lien ryhmä G on yhtenäinen, niin jokainen sen alkio on muotoa $\exp(x_1) \cdots \exp(x_r)$, missä $x_1, \ldots, x_r$ ovat tangenttiavaruuden vektoreita neutraalialkion kohdalla.

9.6 Lien algebrat

Lien ryhmien ominaisuuksia voidaan hyvin pitkälle selvittää neutraalialkion kohdalla määriteltyjen tangenttivektorien avulla. Nämä muodostavat struktuurin, jota kutsutaan *Lien algebraksi*. Saksalainen matemaatikko Wilhelm Killing (1847–1923) oli Liestä riippumatta keksinyt Lien algebran käsitteen, ja onnistui myöhemmin luokittelemaan kaikki niin sanotut *yksinkertaiset* Lien algebrat. Killingin sekavan esityksen siisti väitöskirjassaan ranskalainen Élie Cartan (1869–1951), joka oli itse Lien oppilas.

Määritelmä 9.4. Olkoon $\mathfrak{g}$ vektoriavaruus, jossa on määritelty laskutoimitus $(x, y) \mapsto [x, y]$, nimeltään *Lien tulo*. Oletetaan lisäksi, että kaikilla vektoreilla x, y, z ja skalaareilla λ pätevät seuraavat ehdot:

$$[x+z, y] = [x, y] + [z, y] \quad \text{ja} \quad [\lambda x, y] = \lambda [x, y] \tag{L1}$$
$$[x, y+z] = [x, y] + [x, z] \quad \text{ja} \quad [x, \lambda y] = \lambda [x, y] \tag{L2}$$
$$[x, x] = 0 \tag{L3}$$
$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \tag{L4}$$

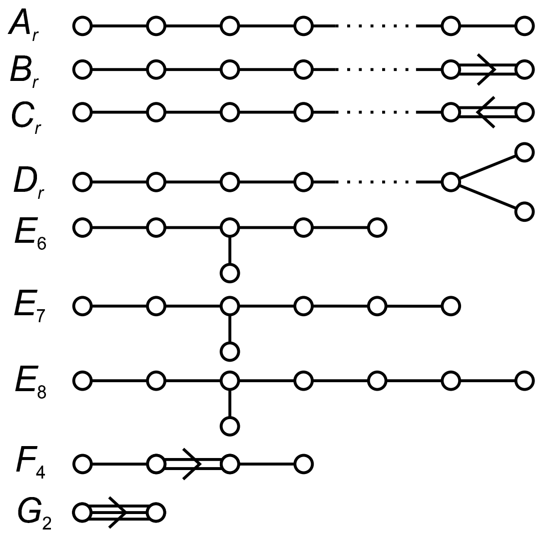
Tällöin avaruutta $\mathfrak{g}$ kutsutaan *Lien algebraksi.*

Ehdot (L1) ja (L2) määrittelevät *bilineaarisuuden* ja ehto (L3) *alternoivuuden*. Ehtoa (L4) kutsutaan *Jacobin identiteetiksi*. Esimerkki reaalikertoimisesta Lien algebrasta on $\mathbb{R}_3$, jossa laskutoimituksena on ristitulo eli $[x, y] = x \times y$.

Lien algebraa sanotaan yksinkertaiseksi, jos sillä ei ole tiettyjä epätriviaaleja alistruktuureja, joita kutsutaan *ideaaleiksi* (sama kuin renkaan ideaali). Killing ja Cartan selvittivät, että yksinkertaiset kompleksikertoimiset Lien algebrat koostuvat alialgebrasta $\mathfrak{h}$, jota kutsutaan *Cartanin alialgebraksi*, sekä joukosta yksiulotteisia alialgebroja, joita kutsutaan *juurialgebroiksi*. Kun juurialgebrojen alkioita kerrotaan Cartanin alialgebran alkioilla, ne pysyvät edelleen samassa juurialgebrassa. Tällä tavoin voidaan jokaiselle juurialgebralle $\mathfrak{l}_i$ määritellä kuvaus $r_i : \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$, jolle pätee

$$[h, x] = r_i(h)x, \qquad \text{kun } x \in \mathfrak{l}_i.$$

Yllä määriteltyjä kuvauksia r_i sanotaan *juuriksi*, ja ne muodostavat niin kutsutun *juurijärjestelmän.* Juurten väliset kulmat voidaan määrittää negatiivisesti definiitin *Killingin muodon* avulla. Yksinkertaisen Lien algebran juuret voivat olla neljässä eri kulmassa toisiinsa nähden, ja kaikki mahdolliset juurijärjestelmät voidaan listata seuraavien *Dynkinin diagrammien* muodossa.



Kuva 11: Dynkinin diagrammit

Diagrammeja tulkitaan siten, että jokainen piste vastaa tiettyä perusjuurta, joiden avulla kaikki muut juuret voidaan muodostaa. Jos kahden perusjuuren välinen kulma on $90°$, niin niiden välille ei piirretä viivaa. Yksi viiva juurten välillä tarkoittaa 120 asteen kulmaa, kaksi viivaa 135:tä astetta ja kolme viivaa 150:tä astetta. Nuolen suunta osoittaa pidemmästä juuresta lyhyempään, jos pituuksissa on eroa.

Juurijärjestelmiä A_r, B_r, C_r ja D_r vastaavia Lien algebroja kutsutaan *klassisiksi*, muita *poikkeuksellisiksi.* Klassiset järjestelmät vastaavat klassisten Lien ryhmien tangenttiavaruuksia seuraavasti:

Diagrammi	Lien ryhmät
A_r	$SL_{r+1}(\mathbb{C})$ ja $SU_{r+1}(\mathbb{C})$
B_r	$O_{2r+1}(\mathbb{C})$ ja $SO_{2r+1}(\mathbb{C})$
C_r	$Sp_{2r}(\mathbb{C})$
D_r	$O_{2r}(\mathbb{C})$ ja $SO_{2r}(\mathbb{C})$

Kaikki ryhmät on määritelty kompleksikertoimisissa avaruuksissa. Reaalikertoimisten ryhmien tangenttiavaruudet ovat reaalikertoimisia Lien algebroja, joiden kerroinkunta voidaan laajentaa *kompleksifioimalla*, minkä jälkeen ne voidaan sovittaa samoihin diagrammeihin. Erityiset unitaariset ryhmät ovat Lien ryhminä reaalimonistoja(!), ja niiden Lien algebrat vastaavat tyyppiä A_r.

9.7 Äärelliset kerroinkunnat

Ranskalainen matemaatikko Claude Chevalley (1909–1984) löysi tavan yleistää Lien algebrat äärellisiin kerroinkuntiin niin, että Cartanin alialgebrat ja juurijärjestelmät säilyvät. Chevalley pystyi systemaattisesti konstruoimaan niin sanotut *Lie-tyypin ryhmät*, jotka koostuvat äärellisten Lien algebrojen automorfismeista. Lie-tyypin ryhmät jakautuvat klassisiin ja poikkeuksellisiin vastaavan Lien algebran juurijärjestelmän mukaan, ja ne muodostavat suuren osan äärellisistä yksinkertaisista ryhmistä.

Myöhemmin on yksinkertaisia Lie-tyypin ryhmiä löydetty lisää, kun huomattiin, että Dynkinin diagrammien automorfismeista saadaan aliryhmiä jo tunnetuille Lie-tyypin ryhmille.

9.8 Loppusanat

Sophus Lie ei saanut kehitettyä Galois'n teorian veroista työkalua differentiaaliyhtälöiden tutkimiseen, mutta hänen panoksensa ryhmäteoriassa hakee silti vertaistaan. Myöhemmin Lien ryhmät ovat tulleet korvaamattomiksi esimerkiksi kvanttimekaniikan kuvailussa, ja Lien keksimät menetelmät ovat näiden ryhmien analysoimisessa välttämättömiä.

Lien terveys alkoi heiketä vuoden 1889 tienoilla. Häneltä diagnosoitiin pernisiöösi anemia, jossa elimistö ei kykene absorboimaan B12-vitamiinia. Lien viimeiset elinvuodet olivat taudin vuoksi vaikeita, sillä hoitokeinoa ei ollut vielä löydetty. Edes lukuisat palkinnot ja huomionosoitukset eivät pystyneet ilahduttamaan häntä. Lie kuoli tautiin 56-vuotiaana, jättäen jälkeensä paljon julkaisematonta materiaalia.

Lähteet:

- Sigurdur Helgason: Sophus Lie, the mathematician, *Proceedings of The Sophus Lie Memorial Conference, Oslo, August, 1992*, Scandinavian University Press, ss. 3–21
- Louis Auslander & Robert E. MacKenzie: Introduction to Differentiable Manifolds, Dover Publications, 1977
- Roger W. Carter: Simple Groups of Lie Type, Wiley-Interscience, 1989