Klassiset ryhmät
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 15.6.2009
Ratkaisuehdotus ja arvosteluperusteita

1. Olkoon K jokin kunta. Osoita, että ryhmä $SL_n(K)$ on ryhmän $GL_n(K)$ normaali aliryhmä ja että tekijäryhmä $GL_n(K)/SL_n(K)$ on isomorfinen multiplikatiivisen ryhmän K^* kanssa.

   Todistus. Käytetään lauseen todistamiseen determinanttikuvausta ja ryhmien homomorfialausetta. Determinanttikuvaus $\det : GL_n(K) \to K^*$ on ryhmähomomorfismi, sillä $\det(xy) = \det(x)\det(y)$. Sen ydin

$$\mathrm{Ker}(\det) = \{g \in GL_n(K) \mid \det(g) = 1\}$$

   on ryhmä $SL_n(K)$. Koska ryhmähomomorfismin ydin on aina normaali aliryhmä, niin $SL_n(K)$ on ryhmän $GL_n(K)$ normaali aliryhmä.

   Osoitetaan seuraavaksi, että det on surjektio. Olkoon $\alpha \in K^*$. Diagonaalimatriisi

$$\begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

   on ryhmän $GL_n(K)$ alkio ja sen determinantti on α. Siten det on surjektio.

   Nyt voidaan käyttää ryhmien homomorfialausetta, jonka nojalla

$$GL_n(K)/SL_n(K) \cong K^*.$$

   □

   Arvosteluperusteita. Jos oli osoittanut, että $SL_n(K)$ on normaali aliryhmä, sai kolme pistettä. Loput kolme pistettä myönnettiin isomorfisuuden osoittamisesta.

   Monet unohtivat perustella, miksi $SL_n(K)$ on normaali aliryhmä. Toiset taas käyttivät valtavasti aikaa osoittaakseen määritelmän nojalla, että $SL_n(K)$ on normaali aliryhmä. Tästä ei tietenkään vähennetty pisteitä, mutta se saattoi vaikuttaa arvosanaan epäsuorasti vähentämällä aikaa muilta tehtäviltä.

2. Osoita, että ekvivalentteja bilineaarisia muotoja vastaavat isometriaryhmät ovat isomorfisia. (Lisäpiste: Voivatko kaksi isometriaryhmää olla isomorfiset, vaikka vastaavat muodot eivät olisi ekvivalentit?)

   Todistus. Oletetaan, että muodot B_1 ja B_2 ovat avaruuden V ekvivalentteja bilineaarisia muotoja. On siis olemassa avaruuden V kääntyvä lineaarikuvaus L, jolle pätee $B_1(v, w) = B_2(Lv, Lw)$ kaikilla $v, w \in V$. Olkoot vastaavasti G_1 ja G_2 muotojen B_1 ja B_2 isometriaryhmät. Jos nyt $g \in G_1$, niin kaikilla $v, w \in V$ pätee

$$\begin{aligned} B_2\big(LgL^{-1}(v), LgL^{-1}(w)\big) &= B_1\big(gL^{-1}(v), gL^{-1}(w)\big) \\ &= B_1(L^{-1}(v), L^{-1}(w)) = B_2(v, w). \end{aligned}$$

Täten $LgL^{-1} \in G_2$, ja konjugointi $\psi_L : g \mapsto LgL^{-1}$ on kuvaus ryhmästä G_1 ryhmään G_2. Konjugointikuvaus on selvästi homomorfismi, sillä $(Lg_1L^{-1})(Lg_2L^{-1}) = Lg_1g_2L^{-1}$, ja lisäksi sillä on käänteiskuvaus $\psi_L^{-1} : g \mapsto L^{-1}gL$. Siispä ryhmät G_1 ja G_2 ovat isomorfiset. $\square$

Kaksi isometriaryhmää voivat olla isomorfiset, vaikka vastaavat bilineaariset muodot eivät olisi ekvivalentit. Ajatellaan esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ muotoja

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{ja} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sylvesterin inertialauseen perusteella muodot B_1 ja B_2 eivät ole ekvivalentit, mutta koska $B_1 = -B_2$ eli muodot eroavat toisistaan vain vakiokertoimella, molemmilla on itse asiassa sama isometriaryhmä.

Arvosteluperusteita. Muotojen ekvivalenssin määritelmän mainitsemisesta sai pisteen, samoin isometrian määritelmästä. Loput pisteet tulivat muista yksityiskohdista. Konjugointia ei tarvinnut osoittaa isomorfiaksi, koska se sivuutettiin luennoillakin vain maininnalla, mutta jos todistusta oli yrittänyt ja sen oli tehnyt väärin, menetti yhden pisteen. Lisäkysymykseen ei kukaan ollut vastannut oikein.

3. Tarkastellaan reaalikertoimisen avaruuden matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Minkätyyppistä bilineaarista muotoa matriisit A ja B kuvaavat? Voivatko ne olla saman muodon matriisiesityksiä eri kantojen suhteen? Jos voivat, etsi kannanvaihtomatriisi kyseisten kantojen välille.

Ratkaisu. Koska matriisit A ja B ovat antisymmetrisiä, ovat myös niitä vastaavat muodot antisymmetrisiä. Koska kerroinkunnan karakteristika ei ole kaksi, nämä antisymmetriset muodot ovat myös alternoivia.

Tiedetään, että vektoriavaruuden surkastumattomat alternoivat muodot ovat aina ekvivalentteja. Muodot A ja B ovat kuin ovatkin surkastumattomia, mutta tätä ei tarvitse erikseen osoittaa, sillä kannanvaihtomatriisin löytäminen riittää tehtävän ratkaisemiseen.

Olkoon A' bilineaarinen muoto, jonka matriisi kannan $S = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ suhteen on A. Konstruoidaan symplektinen kanta (r, s, t, u), jonka suhteen muodon A' matriisi on

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämän jälkeen voidaan kantavektoreiden järjestystä muuttaa niin, että muodon A' matriisiksi saadaan B. Tämä saavutetaan vaihtamalla keskenään s ja t.

Heti huomataan, että matriisin A vasen ylänurkka näyttää halutulta, ja on mahdollista valita $r = v_1$ ja $s = v_2$.

Vektori t on valittava siten, että $t \perp \langle r, s \rangle$ eli $A'(r, t) = 0$ ja $A'(s, t) = 0$. Jos kirjoitetaan $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ kannassa S, niin ehdoista saadaan (matriisia A lukemalla) yhtälöt

$$\begin{cases} t_2 + t_4 = 0 \\ -t_1 - 2t_3 + 3t_4 = 0. \end{cases}$$

Tästä seuraa, että $t = (-3t_2 - 2t_3, t_2, t_3, -t_2)$. Valitaan $t_2 = 1$ ja $t_3 = 0$, jolloin $t = -3v_1 + v_2 - v_4$.

Vektori u on valittava siten, että $u \perp \langle r, s \rangle$ ja $A'(t, u) = 1$. Kuten yllä todettiin, on vektorin u oltava muotoa $(-3u_2 - 2u_3, u_2, u_3, -u_2)$. Ehdosta $A'(t, u) = 1$ saadaan yhtälö

$$1 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3u_2 - 2u_3 \\ u_2 \\ u_3 \\ -u_2 \end{bmatrix} = -3u_3.$$

Nyt siis $u_3 = -\frac{1}{3}$ ja $u = (-2u_2 + 1, u_2, -\frac{1}{3}, -u_2)$. Valitaan $u_2 = 0$, jolloin $u = \frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_3$.

Nyt muodon A' matriisi kannassa (r, t, s, u) on B. Kannanvaihtomatriisiksi saadaan

$$P = \begin{bmatrix} r & t & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kannanvaihtomatriisi P toteuttaa yhtälön $P^\top AP = B$.

Arvosteluperusteita. Kaksi pistettä sai siitä, että oli perustellen todennut muotojen olevan antisymmetrisiä tai alternoivia. Toiset kaksi pistettä sai, jos oli jollakin tavoin osoittanut, että A ja B ovat saman muodon matriisiesityksiä. Loput kaksi pistettä tulivat kannanvaihtomatriisin löytämisestä.

4. Tarkastellaan ortogonaalista hyperbolista tasoa $\mathbb{R}^2$. Olkoot $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktioita, joilla pätee $g(t)^2 - f(t)^2 = 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja joista f on lisäksi surjektio. (Esimerkiksi funktiot sinh ja cosh.) Osoita, että jokainen $g \in SO(\mathbb{R}^2)$ voidaan kirjoittaa muodossa
$$\begin{bmatrix} g(t) & f(t) \\ f(t) & g(t) \end{bmatrix} \qquad \text{tai} \qquad \begin{bmatrix} -g(t) & f(t) \\ f(t) & -g(t) \end{bmatrix},$$
missä $t \in \mathbb{R}$.

Todistus. Ortogonaalisen hyperbolisen tason muoto on $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$, eli $B(x, y) = x^\top By = x_1y_1 - x_2y_2$. Vastaava neliömuoto on puolestaan $Q(x) = x_1^2 - x_2^2$.

Oletetaan, että $g = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in SO(\mathbb{R}^2)$, ja merkitään kantavektoreita $e_1 = (1, 0)$ ja $e_2 = (0, 1)$. Nyt $g(e_1) = (a, c)$ ja $g(e_2) = (b, d)$. Koska $Q(e_1) = 1$, $Q(e_2) = -1$ ja g säilyttää neliömuodon arvot, täytyy olla
$$Q(a, c) = a^2 - c^2 = 1 \tag{0.1}$$
$$\text{ja} \qquad Q(b, d) = b^2 - d^2 = -1. \tag{0.2}$$

Lisäksi $e_1 \perp e_2$, ja g säilyttää kohtisuoruuden, joten
$$B\big((a, c), (b, d)\big) = ab - cd = 0. \tag{0.3}$$

Koska f on surjektio, voidaan valita $t \in \mathbb{R}$ siten, että $f(t) = c$. Tällöin yhtälön (0.1) perusteella $a = \pm\sqrt{1 + f(t)^2} = \pm g(t)$. Väitteen todistamiseksi riittää nyt osoittaa, että $a = d$ ja $b = c$.

Yhtälön (0.3) perusteella $b = cd/a$. (Yhtälöstä $a^2 - c^2 = 1$ seuraa, että $a \neq 0$.) Sijoittamalla tämä yhtälöön (0.2) nähdään, että
$$1 = d^2 - b^2 = d^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = d^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = \frac{d^2}{a^2}.$$

Siispä $d = \pm a$, ja tällöin $b = \pm c$ (molemmissa sama etumerkki). Determinanttiehto tulee nyt muotoon $\det g = ad - bc = \pm(a^2 - c^2)$, ja jälleen yhtälöstä (0.1) nähdään, että täytyy valita $a = d$ ja $b = c$, jotta $\det g = 1$. $\square$

Arvosteluperusteita. Hyperboliseen tasoon liittyvän muodon muistamisesta sai pisteen. Yhtälöiden (0.1), (0.2) ja (0.3) johtamisesta sekä determinanttiehdon mainitsemisesta sai 2 pistettä. Muiden laskujen logiikka ja oikeellisuus tuottivat loput pisteet. Erityisesti kiinnitettiin huomiota perustelujen johdonmukaisuuteen.

5. Essee: unitaariset ryhmät.

Esimerkkivastaus 1.

Unitaarinen ryhmä on vektoriavaruuden hermiittisen muodon isometriaryhmä.

Jotta hermiittinen muoto voidaan määritellä, on vektoriavaruuden kerroinkunnassa oltava automorfismi, jonka kertaluku on kaksi. Tätä automorfismia kutsutaan konjugointiautomorfismiksi. Alkion kuvaa konjugointiautomorfismissa kutsutaan sen konjugaatiksi.

Hermiittiset muodot ovat seskvilineaarisia. Tämä tarkoittaa sitä, että ne ovat lineaarisia ensimmäisen muuttujan suhteen. Toisen muuttujan suhteen lineaarisuuden yhteenlaskuehto toteutuu, mutta vektorien kertoimet muuttuvat konjugaateikseen.

Lisäksi hermiittiseltä muodolta vaaditaan, että muuttujien järjestyksen vaihtaminen muuttaa muodon arvon konjugaatikseen.

Unitaarisen ryhmän alkiot ovat siis vektoriavaruuden hermiittisen muodon säilyttäviä lineaarisia automorfismeja. Vektoriavaruudella voi olla useita erilaisia hermiittisiä muotoja, joita kutakin vastaa erilainen isometriaryhmä. Jokaiselle hermiittiselle muodolle löytyy kuitenkin kanta, jonka suhteen muotoa vastaa diagonaalimatriisi.

Tunnetuin esimerkki konjugaatioautomorfismista on kompleksikonjugointi kompleksilukujen kunnassa. Kun vektoriavaruuden kerroinkuntana on kompleksilukujen joukko ja hermiittiseksi muodoksi valitaan hermiittinen pistetulo, saadaan unitaarinen ryhmä, jolla on monia sovelluksia fysiikassa.

Äärellisten kuntien tapauksessa konjugaatioautomorfismi voidaan määritellä vain siinä tapauksessa, että kunnan kertaluku on neliö q^2. Tällöin konjugointiautomorfismi on $x \mapsto x^q$. Kaikki vektoriavaruuden hermiittiset muodot ovat tässä tapauksessa ekvivalentteja, ja niitä vastaava matriisi on yksikkömatriisi.

Esimerkkivastaus 2.

Tarkastellaan vektoriavaruuksia, joiden kerroinkunnassa voidaan määritellä kertalukua kaksi oleva automorfismi $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$. Tällaisen avaruuden seskvilineaarinen muoto on vektoripareilta kerroinkuntaan määritelty kuvaus S, joka on ensimmäisen komponentin suhteen lineaarinen ja toisen komponentin suhteen toteuttaa ehdot

a) $S(u, v + w) = S(u, v) + S(u, w)$ ja
b) $S(u, \lambda v) = \bar{\lambda} S(u, v)$

kaikilla vektoreilla u, v ja w sekä skalaareilla λ. Määritelmässä käytetään siis yllä mainittua automorfismia. Seskvilineaarista muotoa kutsutaan hermiittiseksi, mikäli sille pätee kaava

$$S(u, v) = \overline{S(v, u)}$$

kaikilla vektoreilla u ja v.

Hermiittisen muodon isometriaryhmää nimitetään unitaariseksi ryhmäksi. Yleisessä tapauksessa vektoriavaruudessa voidaan määritellä monia epäekvivalentteja hermiittisiä muotoja, joista kutakin voi vastata erilainen unitaarinen ryhmä. Kuitenkin esimerkiksi äärellisen kerroinkunnan tapauksessa kaikki avaruuden hermiittiset muodot ovat keskenään ekvivalentteja.

Tarkastelemalla isometriaehtoa matriisimuodossa nähdään, että kaikilla unitaarisilla kuvauksilla g pätee $\det g \cdot \det \bar{g} = 1$. Rajoittumalla pelkästään niihin kuvauksiin, joiden determinantti on yksi, saadaan unitaarisen ryhmän normaali aliryhmä, jota kutsutaan erityiseksi unitaariseksi ryhmäksi. Ottamalla tekijäryhmä skalaarikuvausten suhteen päädytään tavalliseen tapaan projektiivisiin ryhmiin.

Tutuin esimerkki kunnasta, jossa voidaan määritellä kertalukua kaksi oleva automorfismi, ovat kompleksiluvut, joilla kyseinen automorfismi vaihtaa luvun $a+bi$ tämän liittoluvuksi $a-bi$. Avaruudessa $\mathbb{C}^n$ kaikille vektoreille pätee hermiittisyysehdon ansiosta $S(u,u) = \overline{S(u,u)}$, mikä tarkoittaa sitä, että $S(u,u)$ on reaalinen. Silloin on mahdollista puhua positiivisesti definiiteistä muodoista, joilla $S(u,u)$ on positiivinen kaikilla nollasta poikkeavilla vektoreilla u. Positiivisesti definiitin muodon avulla voidaan puolestaan määritellä vektorin pituus ja kahden vektorin välinen kulma, ja unitaarisen ryhmän on määritelmän mukaisesti säilytettävä nämä pituudet ja kulmat. Tällä tavoin kompleksiavaruuden unitaarinen ryhmä muistuttaa reaaliavaruuden ortogonaalista ryhmää. Positiivisen definiittiyden käsite voidaan myös yleistää muihinkin avaruuksiin, joissa luvuille $S(u,u)$ voidaan määritellä järjestys.

Lopuksi voisi mainita joitakin erityisiä esimerkkejä unitaaristen ryhmien käytöstä. Äärellisessä kunnassa voidaan määritellä kertalukua kaksi oleva automorfismi vain, jos kunnan kertaluku on neliö. Tällaisen kerroinkunnan tapauksessa projektiivinen erityinen unitaarinen ryhmä on yksinkertainen, lukuunottamatta joitakin pienidimensioisia poikkeustapauksia. Toisaalta pienidimensioisilla kompleksikertoimisilla unitaarisilla ryhmillä on sovelluksia kvanttimekaniikassa, jossa ne toimivat perusvoimien mittamuunnosten symmetriaryhminä.

Arvosteluperusteita. Selkeästi esitetty unitaarisen ryhmän määritelmä riitti jo sellaisenaan antamaan täydet kuusi pistettä. Virheitä ja puutteita pystyi korvaamaan antamalla lisätietoja unitaarisista ryhmistä tai kuvailuja niiden käytöstä. Huomiota kiinnitettiin erityisesti paitsi esityksen tietosisältöön ja virheettömyyteen, myös selkeyteen ja luettavuuteen. Pitkät, kömpelöt virkkeet sekä ylenmääräinen kaavojen ja symboleiden käyttö vähensivät pisteitä (näitä vähennyksiä sitten toisaalta usein kompensoivat lisätiedot ja esimerkit). Erityisen arveluttavana pidettiin sellaisten symboleiden tai termien käyttö, joita ei esitelty tekstissä ja joita ei ollut käytetty luennoilla tai harjoituksissa.